

30590

029-14C1

现代应用数学丛书

# 经济理论中的数学方法

〔日〕安井琢磨 二階堂 副包 著



上海科学技术出版社

9  
7

現代应用数学丛书

# 經濟理論中的数学方法

——平衡解存在問題——

〔日〕安井琢磨 著  
二階堂 副包

談 祥 柏 譯  
刘 源 張 校

上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。以凸集理论为中心,讨论了经济理论中较新的数学方法,集合论方法的性质与特征,并且介绍了若干应用这种方法所取得的成果。全书分经济学中基础概念的数学表现及 Walras 式平衡模型与不动点定理两章。可供大专院校有关专业师生以及计划、经济理论有关研究工作者参考。

现代应用数学丛书

## 经济理论中的数学方法

——平衡存在問題——

原 书 名	经济理論における数学的方法
	——均衡存在問題——
原 著 者	(日) 安 井 琢 磨 二 階 堂 副 包
原出版者	岩 波 书 店 1958
譯 者	談 祥 柏
校 者	刘 源 張

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书馆上海厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 2 16/32 字数 57,000

1963年5月第1版 1963年5月第1次印刷

印数 1—4,600

統一书号: 13119 · 346

定 价: (十四) 0.46 元

## 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册, 分成 A、B 两组, 各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并, 整理成 42 种, 不另分組編号, 陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广, 其內容都和現代科学技术密切有关, 有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富, 而叙述扼要, 篇幅不多, 有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然, 这套书的某些观点不尽适合于我国的情况, 但其方法可供参考。因此, 翻譯出版这一套书, 对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的, 写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理, 为了尽可能地减少这种影响, 我們在每一譯本中, 特請譯者或校閱者撰写序或后記, 以介紹有关学科的最近发展状况, 并对全书內容作一些評價, 提出一些看法, 結合我国情况补充一些資料文献, 在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志, 为提高书籍的质量付出了巨大劳动, 在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

## 现代应用数学丛书

书 名	原作者	譯 者	书 名	原作者	譯 者
代 数 学*	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論*	古 屋 茂	呂紹明
几 何 学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力 学 系 与 映 射 理 論	岩 田 义 一	孙澤瀛
复 变 函 数*	功力金二郎	刘书琴	平 面 彈 性 論*	森 口 繁 一	刘亦珩
集合·拓扑·測度*	河 田 敬 义	賴英华	有限变位彈性論*	山 本 善 之 夫	刘亦珩
泛 函 分 析*	吉 田 耕 作	程其襄	变 形 几 何 学	近 藤 一 夫	刘亦珩
广 义 函 数*	岩 村 联	楊永芳	塑 性 性 論*	鷺 津 文 一 郎	刘亦珩
常 微 分 方 程*	福原滿洲雄	張庆芳	粘 性 流 体 理 論*	谷 一 郎	刘亦珩
偏 微 分 方 程*	南 云 道 夫	錢端壯	可 压 縮 流 体 理 論*	河 村 龙 馬	刘亦珩
特 殊 函 数*	小谷正雄等	錢端壯	网 絡 理 論*	喜安善市等	陆志刚
差 分 方 程*	福 田 武 雄	穆鴻基	自 动 控 制 理 論*	喜安善市等	翟立林
富里哀变换与拉普拉斯变换	河 田 龙 夫	錢端壯	网 絡 拓 扑 学*	近 藤 一 夫	張 設
变分法及其应用*	加 藤 敏 夫	周怀生	信 息 論*	喜安善市等	李文清
李 群 論*	岩 堀 长 庆	孙澤瀛	推 断 統 計 过 程 論	北 川 敏 男	刘璋温
随 机 过 程*	伊 藤 清	刘璋温	統 計 分 析*	森 口 繁 一	刘璋温
回 轉 群 与 对 称 群 的 应 用	山 内 恭 彦 等	張质賢	試 驗 設 計 法*	增 山 元 三 郎	刘璋温
結 晶 統 計 与 代 数*	伏 見 康 治	孙澤瀛	群 体 遺 傳 学 的 数 学 理 論	木 村 資 生	刘祖洞
偏 微 分 方 程 的 应 用	犬 井 欽 郎 等	楊永芳	博 奕 論*	官 澤 光 一	張毓椿
微 分 方 程 的 近 似 解 法	加 藤 敏 夫 等	王占瀛	綫 性 規 划*	森 口 繁 一 等	刘源張
数 值 計 算 法*	森 口 繁 一 等	周昌齡	經 济 理 論 中 的 数 学 方 法	安 井 琢 磨 等	談祥柏
量 子 力 学 中 的 数 学 方 法	朝 永 振 一 郎	周民强	随 机 过 程 的 应 用*	河 田 龙 夫	刘璋温
工 程 力 学 系 統*	近 藤 一 夫 等	刘亦珩	計 算 技 术	高 桥 秀 俊	姚 晋
			穿 孔 卡 計 算 机	森 口 繁 一	刘源張

注：有 \* 者已經出版，有 · 者即將出版。

## 譯 者 序

本书叙述的主要内容是平衡解存在定理。如所周知，所謂一般均衡理論是以 Walras(法国)，Pareto(意大利)为代表的洛桑学派所創始的。本书的理論是古典一般均衡理論的繼續发展，作者运用了集合論的方法，利用欧氏空間綫性代数与初等拓扑学作为工具，对一些經濟理論問題作了定量的探討，并給出了平衡解存在定理的証明。

作者二階堂是日本有名的經濟計量学家，在这方面有許多研究工作。本书第 1 章叙述了如何用凸集的基本性质来解釋生产、消費等經濟現象，以作为后面的准备。第 2 章談到了不动点定理，并証明了平衡解的存在(單純交換模型与 Arrow-Debreu 模型)。

对于通曉計量經濟学的讀者來說，閱讀本书需要具备一些集合論与拓扑学的知識，这方面的入門书不少，对那些打算在較短時間內掌握这些基礎知識的讀者來說，可以先看本丛书中的《集合·拓扑·測度》(河田敬义著，賴英华譯)一书。

本书內容是以資本主义經濟为背景，所以本书所述某些“法則”和提法，如“完全竞争”，“利潤最大原則”，“边际效用”，“收获率不变法則”，“收获率非递増法則”等，对我国社会主义經濟并不适用。此外，本书中某些名詞，如“財貨”，也与我国經濟文献中的“財貨”含义不同。尽管如此，这本书对于我们了解現代經濟計量学的某些理論和学說，探討集合論方法和其他高深数学在經濟学中应用的可能性，以及如何构造經濟数学模型等，仍有一定参考价值。翻譯本书的目的也在于此。

譯稿承中国科学院数学研究所刘源張先生审閱，提出了許多宝贵意見，在此表示感謝。限于譯者的水平，因此疏漏錯誤之处，在所不免，切望讀者加以指正。

談 祥 柏 1962 年 6 月 於上海

## 序

自从 A. A. Cournot 开始，在經濟理論中有系統地引进了数学方法，特别是从 L. Walras, V. Pareto 形成了一般平衡理論以来，数学作为經濟理論的不可缺少的工具，其重要性已越发增加了。大致說，直到本世紀三十年代的末期为止，在經濟學上所用到的数学，是以微积分学为主，此外，包含微分方程、差分方程、古典代数等部分。由于这样一些数学方法的引用，使經濟理論取得了很大进步，不容否认，显著地提高了精确性，然而，微积分学的机械运用，对于闡明經濟現象是不是一种很合适的方法，这一点尚成疑問。由于这种方法，在遇到經濟現象的数学的定式化时，不仅需要作出不必要的强假定，而且又多方回避了构成理論基础的中心命題的証明。对于这一点的重新考虑，以 1944 年 von Neumann 与 Morgenstern 的“博奕論与經濟行为”一书的出現为轉折而頓然加深。在这以后不久，对在三十年代中叶就已写出但一直被忽略的 A. Wald 与 J. von Neumann 的經濟學論文的首創性意义，重新引起了注意。从这样的情况出发，形成了使用更为适合于經濟現象的数学，并且充分發揮了数学所具有的論証能力与分析能力的新的研究方向。其研究成果，一方面成为利用产业关联理論与綫性规划所作的經濟分析，另一方面重新构成了古典的平衡理論，而在这个平衡理論的基础上，正在出現向新的領域前进的趋势。本书将討論这个經濟理論的新动向中所見到的数学方法。在內容方面，本书的目的，是闡述上面两种成果中属于后面那一部分的一些成就。至于前者，特别是綫性规划，以及与之有密切关系的博奕論，已經在本丛书的其他书里談到了。此外，在历来經濟理論上所利用的古

典的数学，由于叙述它们的书籍已很多，所以凡是涉及到它们时，本书只好割爱了。

本书所讲到的方法，就是一部分经济学者所说的集合论的方法。这是对于引用 Euclid 空间中的线性代数与初等拓扑学的一种倾向的一般性称呼。目前的发展状况是：成为其中心内容的是有关凸集的一些定理，因而，本书一方面也是凸集理论。

第 1 章解释了凸集的基本性质，并考察了怎样将生产、消费等经济现象用凸集概念来表示。这是为后面的本论部分做好数学与经济学的准备。但是，对有广泛应用（特别是用来证明博弈论中的鞍点定理以后）的分离定理的解释，这里只好割爱了。这是因为篇幅的限制，本书叙述的内容只能以一个课题——即平衡解存在问题——作为中心而予以统一起来的缘故。事实上，在目前情况下，有鉴于阐明这个问题，要涉及较之分离定理更深一层地触及凸集性质的定理（即不动点定理），这也许是不得不采取的措施。

第 2 章叙述了关于平衡解存在定理的最近研究成果，这是从 Walras 以来一般平衡理论中没有解决的基本问题之一。Wald 排除了那种方程数与未知数个数相一致的朴素方法，第一次严格证明了平衡理论中特别情形（即 Cassel 方程）的解的存在性。这个问题，最近由于 K. J. Arrow 和 G. Debreu, D. Gale, L. McKenzie, 与二阶堂等人的工作而取得了很大的进展。这里，重要点是，在经济学上所得的循环（后文要谈到的 Walras 法则），就是数学上的不动点定理。在遇到 Arrow-Debreu 模型的说明时，避开了不必要地以一般定理为依据的办法，问题的解决在必要与可能范围内尽可能采用简明易懂的办法来阐述。

本书原计划由古谷弘教授撰写，由于教授突然亡故，仓卒间才由笔者二人担任这一任务，并商定由二阶堂执笔，由安井作一些整理加工。



# 目 录

出版說明

譯者序

序

第1章 經济学中基础概念的数学表現 .....	1
§ 1 凸集 .....	1
§ 2 凸集与集的运算 .....	4
§ 3 生产活动与凸集 .....	6
§ 4 凸集的拓扑性质 .....	9
§ 5 凸包 .....	13
§ 6 单纯形 .....	15
§ 7 价格与基本单纯形 .....	19
§ 8 效用指标与消費者行动 .....	21
第2章 Walras 式平衡模型与不动点定理 .....	27
§ 9 单纯交换模型 .....	28
§ 10 Arrow-Debreu 平衡模型 .....	31
§ 11 供求函数的构成 .....	34
§ 12 原型的平衡与供求函数的平衡, 其等价性 .....	39
§ 13 Brouwer 不动点定理 .....	42
§ 14 角谷不动点定理 .....	47
§ 15 关于映象的运算 .....	50
§ 16 Walras 法則与經濟平衡 .....	54
§ 17 平衡解的存在(单纯交换模型的情况) .....	58
§ 18 平衡解的存在(Arrow-Debreu 模型的情况) .....	62
后記 .....	69
記号表 .....	70
参考文献 .....	71

## 第1章 經濟學中基礎概念的數學表現

經濟學上的財貨空間(或商品空間),无非就是把 Euclid 空間給與適當的經濟學的解釋。成為生產、消費等經濟活動對象的財貨,除了谷物、煤炭、化學纖維等物理的財貨之外,還包含各種勞動(例如熟練勞動與不熟練勞動)與各種服務(例如輸送等服務)。根據問題的性質與研究的角度,把它們分成  $n$  類,並用號碼區別,例如可分別記為第一種財貨,第二種財貨,……,以及一般地,第  $j$  種財貨等等。如果由各該相應的度量單位所決定的各種財貨的量值用實數來表示,即如果第  $j$  種財貨的量值為  $x_j$ ,則財貨的組合  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  就可以看作是  $n$  維 Euclid 空間  $R^n$  的一個點。此時,除去例外的一些情況,在經濟學上的財貨的量值作為連續量來處理,就可以應用 Euclid 空間的線性代數、點集論等方面的許多研究成果。

在研究數理經濟學的學者中間,雖然微積分,最近還有線性代數等方面的知識已相當普及,但是,點集論,特別是有關 Euclid 空間拓撲學的知識,很明顯是貧乏的。這本書假定讀者已經有了拓撲學的極初步的修養。由於篇幅的限制,要把本書的敘述做到完整獨立,遺憾得很,是做不到的。幸而,在本叢書中,河田教授著的《集合·拓撲·測度》一書中已將有關的知識闡述了,此外,這方面較好的入門書籍也不少,讀者可以用各自適當的方法學習和掌握這方面的最低限度的知識。這裡所謂拓撲學的修養,也不過是指關於一些最基本的、常識性的東西,例如收斂、鄰域、閉包、閉集、開集、內點、境界點、外點、連通、同胚、緊性等等。這些在一般微積分學開頭的地方就有出現,對於學習近代數學以及有志於研究其應用的人,不論其專攻領域如何,都是必需的常識,這一點,必需予以強調。

### §1 凸集

以 Euclid 空間  $R^n$  中兩個點  $x, y$  為端點的線段,是由

$$ax + \beta y; \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1 \quad (1.1)$$

表示的點的集合。這集合用記號  $[x, y]$  表示。必要時，還使用記號  $(x, y)$ ,  $[x, y)$ ,  $(x, y]$  等等。它們分別表示着下列集合：

$$(x, y) = \{ax + \beta y \mid \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\},$$

$$[x, y) = \{ax + \beta y \mid \alpha > 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\},$$

$$(x, y] = \{ax + \beta y \mid \alpha \geq 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

綫段  $[x, y]$  的各個點，叫做  $x$  與  $y$  的**凸組合**。

“如果  $R^n$  的子集  $X$  包含兩個點  $x, y$ ，則  $X$  必同時包含綫段  $[x, y]$ ”，滿足這樣的性質時， $X$  叫做**凸集**。上述凸集定義中：“如果包含兩個點  $x, y \cdots$ ”等一段並沒有說  $X$  一定不是空集，空集亦是凸集的一種。然而，今後遇到其意義很明顯，不會引起混淆的時候，諸如“非空集的凸集”等冗長的敘述，當極力避免。除去空集以外，還有  $R^n$  全體、超平面、直綫等的部分綫性空間、一個點、球的內部等等，總之，凸集的例子非常之多。

**例1 正象限** 在  $R^n$  的點  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  中，所有的坐標分量都是非負時，則一切這樣點的集合稱為  $R^n$  的**正象限**，用  $R_+^n$  表示，即

$$R_+^n = \{x \mid x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)\}. \quad (1.2)$$

當  $n=2$  時，如圖 1.1 所示， $R_+^2$  相當於第一象限。由上可見， $R_+^n$  是凸集。

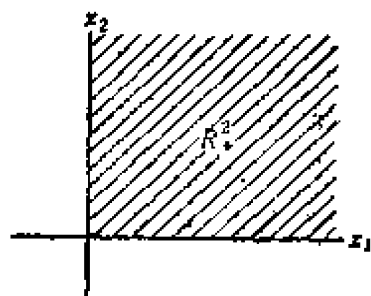


圖 1.1

**例2 一次不等式的解集合** 在  $R^n$  中給定有限個或無限個一次函數

$$f_\lambda(x) = \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} x_j + b_\lambda \quad (\lambda \in A),$$

不等式組  $f_\lambda(x) \geq 0$  的解集合，即

$$X = \{x \mid f_\lambda(x) \geq 0, \lambda \in A\} \quad (1.3)$$

是一個凸集。這裡， $A$  是下標的集合。如果把全部不等號“ $\geq$ ”或其中的若干個用嚴格不等號“ $>$ ”或用等號代替，或改變不等號的方向，亦得到同樣的結果。

**証明** 如果  $x, y \in X$ ，則

$$f_{\lambda}(x) = \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} x_j + b_{\lambda} \geq 0,$$

$$f_{\lambda}(y) = \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} y_j + b_{\lambda} \geq 0 \quad (\lambda \in A).$$

故对于  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ , 有

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(\alpha x + \beta y) &= \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} (\alpha x_j + \beta y_j) + b_{\lambda} \\ &= \alpha \left( \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} x_j + b_{\lambda} \right) + \beta \left( \sum_{j=1}^n a_{\lambda j} y_j + b_{\lambda} \right) \\ &= \alpha f_{\lambda}(x) + \beta f_{\lambda}(y) \geq 0 \quad (\lambda \in A). \end{aligned}$$

因此

$$\alpha x + \beta y \in X.$$

其余情况亦可同样地证明。

在例2中,若下标的集合  $A$  只含有一个元素,则  $X$  称为半空间(說得更完整些,是半閉空間)。由解析几何可知,对于一个一次函数

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j + b,$$

$L = \{x | f(x) = 0\}$  表示超平面,这个超平面把  $R^n$  分成两部分,即所謂正領域  $\{x | f(x) > 0\}$  与負領域  $\{x | f(x) < 0\}$ , 这些領域各与超平面  $L$  的和集是半空間

$$X_+ = \{x | f(x) \geq 0\} \text{ 与 } X_- = \{x | f(x) \leq 0\}.$$

这样情况下,系数  $a_j$  中一定要有非0的数,这一点显然是要作为前提的。

此外,对  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , 如果  $a_{\lambda j} = \delta_{\lambda j}$  (Kronecker 的  $\delta$ )<sup>①</sup>,  $b_{\lambda} = 0$ , 则  $X$  就是例1的正象限。 $A$  作为无限集的例子,如果設

$$f_{\lambda}(x) = -x_1 \cos \lambda - x_2 \sin \lambda + 1 \quad (0 \leq \lambda < 2\pi),$$

则  $X$  就是  $R^2$  中以原点为中心,半径为1的圆。

对应于在例2中规定  $X$  的各个一次函数  $f_{\lambda}$  的集合,則可得

$$X_{\lambda} = \{x | f_{\lambda}(x) \geq 0\}.$$

如果  $a_{\lambda j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 中有非0的数,这些集合是半空間,如果  $a_{\lambda j} = 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 則有二种情况:当  $b_{\lambda} \geq 0$  时是  $R^n$  全体;当  $b_{\lambda} < 0$  时則成为空集。总之,不管怎样,由于  $X = \bigcap_{\lambda \in A} X_{\lambda}$ , 所以  $X$  是有限个或无限个半空間的公共部分。

①  $\delta_{\lambda j} = \begin{cases} 0 (\lambda \neq j), \\ 1 (\lambda = j). \end{cases}$

**許多點的凸組合** 對  $R^n$  的  $s$  個點  $x^1, x^2, \dots, x^s$  加數分別是  $\alpha_i \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$  所作的一次組合  $\sum_{i=1}^s \alpha_i x^i$  叫做這些點的凸組合。如果  $X$  為凸集,  $x^i \in X (i=1, 2, \dots, s)$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ , 則  $X$  含有這些點的凸組合。

**證明** 當  $s=2$  時, 由  $X$  是凸集的定義, 本定理的結論顯然是正確的。假定  $s=m$  時, 結論亦是正確的。如果有一個  $\alpha_1$  是 0, 那末  $m+1$  個點  $x^1, x^2, \dots, x^{m+1}$  的凸組合可以看作是  $m$  個點的凸組合, 於是歸納法的假設可知  $X$  是包含凸組合的。以下設  $\alpha_i > 0 (i=1, 2, \dots, m+1)$ , 則有

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + (1 - \alpha_1) \sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x^i. \quad (1.4)$$

上式可以看作是  $X$  的兩個點  $x^1, \sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x^i$  的凸組合, 所以 (1.4) 含於  $X$  中。這是由於  $x^1$  按照原來的假設, 而  $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x^i$  由歸納法的假設都分別含於  $X$  中, 故知定理為真。

## §2 凸集與集的運算

(i) **幾個凸集的公共部分** 給定有限個或無限個凸集  $X_\lambda (\lambda \in A)$ , 則它們的公共部分  $\bigcap_{\lambda \in A} X_\lambda$  也是凸集。

**證明** 如果  $x, y \in \bigcap_{\lambda \in A} X_\lambda$ , 則  $x, y \in X_\lambda (\lambda \in A)$ 。故

$$[x, y] \subset X_\lambda \quad (\lambda \in A),$$

所以

$$[x, y] \subset \bigcap_{\lambda \in A} X_\lambda.$$

(ii) **凸集的直積** 給定  $X_\lambda$  作為  $n_\lambda$  維財貨空間  $R^{n_\lambda}$  的凸集 ( $\lambda=1, 2, \dots, s$ ), 則直積  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_s$  是直積  $R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_s}$  (或者亦可記為  $R^n, n = \sum_{\lambda=1}^s n_\lambda$ ) 的子集, 它也是一個凸集。

**证明** 把  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$  中的两个点用

$$x = [x^1, x^2, \cdots, x^s], \quad y = [y^1, y^2, \cdots, y^s]$$

来表示, 如果  $x^\lambda, y^\lambda \in X_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \cdots, s$ ), 那末对于  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , 有

$$\alpha x + \beta y = [\alpha x^1 + \beta y^1, \alpha x^2 + \beta y^2, \cdots, \alpha x^s + \beta y^s].$$

这里, 由于各个  $X_\lambda$  是凸的, 故

$$\alpha x^\lambda + \beta y^\lambda \in X_\lambda.$$

于是由直积的定义推得

$$\alpha x + \beta y \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s.$$

(iii) **凸集在仿射映象下的象** 所谓仿射映象  $f: R^n \rightarrow R^m$ , 即对于使得  $\alpha + \beta = 1$  的  $\alpha, \beta$  值, 能使

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

成立的映象。在这里, 关于  $\alpha, \beta$  的正负不受限制。如所周知, 仿射映象是线性映象与平行移动相结合的一种映象。如果  $X$  是  $R^n$  的凸集, 则其象  $f(X)$  也是凸集。

**证明** 如果  $f(X) \ni f(x), f(y)$ , 则对  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$  有

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y),$$

并且  $\alpha x + \beta y \in X$ . 故而

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \in f(X).$$

**应用例 1 凸集与纯数的乘积** 若集合  $X \subset R^n$ , 则当  $\alpha$  为实数时, 集合  $\alpha X = \{\alpha x | x \in X\}$  称为  $X$  的  $\alpha$  倍。如果  $X$  是凸集, 那末  $\alpha X$  也是凸集。

**证明** 由于映象  $f(x) = \alpha x: R^n \rightarrow R^n$  是仿射映象, 并且  $\alpha X = f(X)$ , 故可视为上述第 (iii) 种情形的特例。

**应用例 2 几个凸集的矢量和** 对于集合  $X_\lambda \subset R^n$  ( $\lambda = 1, 2, \cdots, s$ ), 把集合  $\left\{ \sum_{\lambda=1}^s x^\lambda | x^\lambda \in X_\lambda \right\}$  用  $\sum_{\lambda=1}^s X_\lambda$  来表示, 或者把它记为

$X_1 + X_2 + \cdots + X_s$  ①, 称为这些集合的矢量和。如果各个  $X_i$  是凸集, 则其矢量和亦是凸集。

**证明** 映象

$$f(x^1, x^2, \dots, x^s) = \sum_{\lambda=1}^s x^\lambda: R^n \times R^n \times \cdots \times R^n \rightarrow R^n$$

是仿射映象, 且

$$\sum_{\lambda=1}^s X_\lambda = f(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s).$$

故根据(ii),  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_s$  是凸集, 又根据(iii)可知, 它的仿射映照下的象亦是凸集。

由上面两个例子可见, 当  $X$  与  $Y$  是凸集时, 其矢量差  $X - Y$  也是凸集。

### §3 生产活动与凸集

在国民经济再生产的各个环节中, 生产、消费等经济活动, 有着很复杂的相互影响关系。在这样的相互关系中, 我们把具有经济学意义的、行施决策的行动单位叫做经济主体, 例如国际贸易论中的国家, 作为国民经济构成单位的企业, 家庭经济, 以及在计划经济理论中的计划行政部门等等, 都是经济主体的例子。

所谓生产, 就是结合一些生产要素(如劳动力、原料等等)把它们变换成产品。如果形式地加以规定, 则在  $n$  种财货里, 有些是作为投入物, 有些是作为产品。同一种类的财货, 有可能既是投入物又是产品, 并且所有的财货都是纯数, 即是说, 产品与投入物的差额可用  $y_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 来表示。如果  $y_j > 0$ , 则理解为把第  $j$  种财货看作产品, 如果  $y_j < 0$ , 则理解为将  $-y_j$  个单位作为投入物。这样一来, 就可把生产活动(或者更简短一些, 把它叫做活动 process, activity)作为投入物与产品之间的技术变换来处理, 于是就

① 注意不要把矢量和  $X_1 + X_2 + \cdots + X_s$  与和集  $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_s$  相混淆。

可由財貨空間中的点  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  来表示。再进一步, 我們將某个經濟主体的所有那些在技术上可能的活动  $y$  的集合用  $Y$  来表示。这里所謂“技术上可能”的意思是指: 只要所需要的投入物能够保証供应<sup>①</sup>, 則  $Y$  內的  $y$  是可能實現的 (feasible)。对于活动  $\alpha y$  ( $\alpha \geq 0$ ),  $y \in Y$ , 如果  $\alpha = 0$ , 則是投入物与产品同时为 0, 也就是說, 它对应着經濟上的无活动状态。当  $\alpha > 0$  时, 則表示着以活动  $y$  的投入物与产品的  $\alpha$  倍作为其投入物与产品的活动, 亦即对应着以  $y$  的  $\alpha$  倍規模来运轉的活动。 $\alpha$  称为**活动水平** (activity level)<sup>②</sup>。因而, 可以看作  $\alpha y \in Y$ 。此外, 当  $y^1, y^2 \in Y$  成立时, 由于  $y^1 + y^2$  的投入物与产品分別是  $y^1, y^2$  的投入物与产品之和, 故它对应于两种活动的并行的运轉。由于这在技术上也是可能的, 所以  $y^1 + y^2 \in Y$  可以成立。

在上述經濟学的解釋之下,  $Y$  的这种性质: “如果  $y, y^1, y^2 \in Y$ , 若  $\alpha \geq 0$ , 則  $\alpha y, y^1 + y^2 \in Y$ ”, 相当于数学上**凸錐**的定义。容易看到, 凸錐是一个凸集。

**技术矩陣** 給定有限个活动  $a^1, a^2, \dots, a^m \in R^n$ , 我們来考虑两种情况: 第一种是把这些活动并行地运轉的活动, 第二种是以种种不同的活动水平进行着的活动。显然, 这两者結合起来时, 就能产生无数的活动。此等活动集合就成为上面所說的  $Y$  的一个实例, 即

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a^i \mid x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \right\}. \quad (3.1)$$

現在作一个以  $a^i$  为第  $i$  行的矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}.$$

① 一般說来, 由于  $y$  是表示現有投入物与現有产品之間的技术变换关系, 因而是在投入物与該項資本設備得到保証的前提之下來說的。

② 更詳細一些說, 当  $z = \alpha y$  时, 我們把  $\alpha$  叫做在把  $y$  作为单位活动时的活动水平。



又若  $x \in R_+^n$ , 则(3.1)就成为

$$Y = \{y | y = xA, x \in R_+^n\}. \quad (3.2)$$

$A$  叫做技术矩阵(technology matrix),  $A$  的元素称为生产系数, 而  $x$  是活动水平矢量(activity level vector)。

**关于生产活动集合的一些公设** 在上面的解说中, 活动的集合  $Y$  是一个凸锥, 作为凸锥条件之一的: “如果  $y \in Y$ , 则  $\alpha y \in Y$ ”, 就是通常所称的“收获率不变法则”。但若按照 Arrow-Debreu 的看法,  $Y$  不一定是凸锥, 只当作为凸集, 不过为此另外附加  $Y$  包含 0 的条件, 则  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 故对于  $y \in Y$ , 便有

$$\alpha y = \alpha y + (1-\alpha)0 \in Y,$$

这就是收获率非递增法则。 $n=2$  时, 如图 3.1 所示。设  $y = (y_1, y_2)$ ,

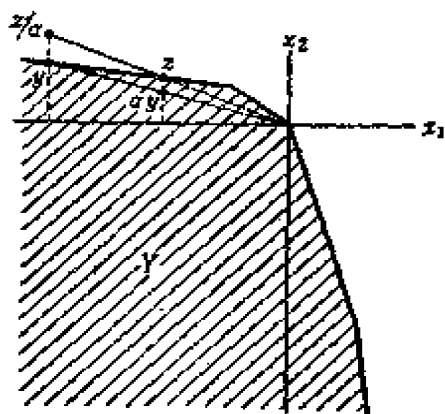


图 3.1

$y_1 < 0, y_2 > 0$ , 则把第一种财货  $-y_1$  个单位投入后, 第二种财货  $y_2$  个单位就被生产出来。如果把通过  $\alpha y$  且平行于  $x_2$  轴的直线与  $Y$  的边界的交点取为  $z = (z_1, z_2)$ , 则有  $z_1 = \alpha y_1$  成立, 并且一般地说,  $\frac{z}{\alpha} \notin Y$ . 因而, 在  $Y$  的活动中, 只要  $\frac{z}{\alpha}$  与第一种财货的投入量

相等, 并且伴随着关于第二种财货的生产量的最有利的  $y$ , 就使  $y_2 < \frac{z_2}{\alpha}$  成立。这时, 就是收获率递减法则得以成立的情况。这个法则意味着: 尽管将投入物增加到  $\frac{1}{\alpha}$  倍, 产品亦按相同比例来增高这一点在技术上不可能。Arrow-Debreu 为了顾及到经济现实, 关于活动的集合  $Y$  必须有妥善的假定, 他对于活动的集合, 加上下列三个条件<sup>①</sup>:

① 参阅本书参考文献 Arrow & Debreu [2].

- (1)  $Y$  是包含 0 的凸的闭集。
- (2)  $Y$  与正象限  $R_+^n$  的公共部分只能是 0。
- (3)  $Y$  与  $-Y$  的公共部分只能包含 0。

关于第一点,  $Y$  是包含 0 的凸集, 其意义已经讲过了。假如对于活动  $y$ , 只要不论怎样与  $y$  靠近的活动含于  $Y$  中时,  $y$  也含于  $Y$  中, 由于这在技术上是可能的, 所以闭集的假定也是妥当的。

不消耗任何投入物, 而有某种财货的正值作为产品而产出的活动, 是用 0 以外的正象限的点来表示的。实际上, 这是一种方便的说法而已, 也就是说, 第(2)条否定了无中生有的可能性, 亦即“世外桃源”是根本不存在的。因此,  $y \in Y$  时, 假使具有正的分量的话, 也就必须具有负的分量。

第(3)条的意思是, 0 以外的活动是不可逆的。对于  $y \in Y$ ,  $-y$  是将  $y$  的投入物与产品互换的活动, 因而可以叫做逆活动。如果  $y \in Y$ , 且  $y \neq 0$ , 那末  $-y \notin Y$ , 其意思是说逆活动这时不可能。例如, 有某种基本生产要素(如劳动等), 不管它在哪一个  $y$  里作为投入物, 第(3)条件总是成立的。图 3.1 的  $Y$ , 是能满足(1)(2)(3)三个条件的实例。

#### §4 凸集的拓扑性质

对于 Euclid 空间  $R^n$  的两个点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 定义内积为

$$xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \quad (4.1)$$

以内积为基础可定义点  $x$  的模

$$\|x\| = \sqrt{xx}. \quad (4.2)$$

进一步, 利用模的定义可以定义两点  $x, y$  之间的距离

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad (4.3)$$

这样就引入了拓扑的概念。在本节中,将以凸集的简单的拓扑性质为中心进行叙述。

1) 点  $a$  与集合  $X$  的距离 点  $a$  与集合  $X$  的距离  $\rho(a, X)$  由

$$\rho(a, X) = \inf_{x \in X} \rho(a, x)$$

给出,当  $\varepsilon > 0$  时,

$$U(X, \varepsilon) = \{x | \rho(x, X) < \varepsilon\}, \quad (4.4)$$

叫做  $X$  的  $\varepsilon$  邻域。当集合  $X$  只是一个点的时候,则  $U(a, \varepsilon)$  就

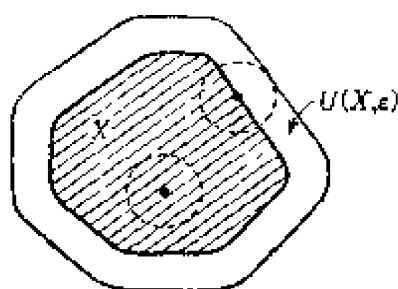


图 4.1

是以  $a$  为中心的  $\varepsilon$  球邻域,于是成为凸集(开集)。如果引用前面讲过的集合的矢量和概念,则因  $U(X, \varepsilon)$  可以写成

$$U(X, \varepsilon) = X + U(0, \varepsilon),$$

故若  $X$  为凸集,由 § 2 的应用例 2 可知,

$U(X, \varepsilon)$  也是凸集。

2) 如果  $X$  是凸集,则  $X$  的闭包  $\bar{X}$  也是凸集。

**证明** 由于  $\bar{X} = \{x | \rho(x, X) = 0\}$ , 故

$$\bar{X} = \bigcap_{\varepsilon > 0} U(X, \varepsilon),$$

考虑到各个  $U(X, \varepsilon)$  是凸集,故由 § 2 的(i)可知  $\bar{X}$  是凸集。

3) 若  $a$  是凸集  $X$  的内点,而  $b \in \bar{X}$ , 则线段  $[a, b)$  上的点都是  $X$  的内点。

**证明** 因为  $a$  是内点,故对适当的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$U(a, \varepsilon) \subset X.$$

由前述,  $[a, b)$  上的点可表示为下列的形状:

$$c_t = (1-t)a + tb \quad (0 \leq t < 1).$$

现在,设  $x \in U(c_t, (1-t)\varepsilon)$ , 则

$$\|x - c_t\| < (1-t)\varepsilon.$$

又因  $b \in \bar{X}$ , 故有

$$t\|b-d\| < (1-t)\varepsilon - \|x-c_t\|$$

成立, 所以与  $b$  充分接近的点  $d$  应当在  $X$  的内部。于是

$$\|x - (1-t)a - td\| \leq \|x - (1-t)a - tb\| + t\|b-d\| < (1-t)\varepsilon,$$

两边用  $1-t$  除并整理, 因

$$\left\| \frac{1}{1-t}(x - td) - a \right\| < \varepsilon,$$

故

$$e = \frac{1}{1-t}(x - td) \in U(a, \varepsilon) \subset X.$$

于是

$$x = (1-t)e + td \in [e, d] \subset X.$$

故証明了

$$U(c_t, (1-t)\varepsilon) \subset X,$$

因而,  $c_t$  是  $X$  的内点。上面証明的要点是, 与  $c_t$  在线段  $[a, b)$  上接近  $b$  相对应, 把球邻域的半径缩小到  $(1-t)\varepsilon$  这一件事。

根据以上的証明, 可以了解以下几个重要事实:

(i) 在以凸集  $X$  的内点  $a$  为端点的半直线上,  $X$  至多存在一个境界点。

**証明** 如果境界点有两个以上, 設它們之中的两个是  $b, c$ , 則由  $b \in [a, c)$  或  $c \in [a, b)$ , 根据 3),  $b, c$  之中必有一个是内点。

(ii) 如果  $X$  是凸集, 則  $X$  的内点的集合, 即所謂**开核**  $X^\circ$  也是凸集。

**証明** 設  $a, b \in X^\circ$ , 无需特別說明, 由于  $b \in \bar{X}$ , 故有  $[a, b) \subset X^\circ$ , 因而結果  $[a, b] \subset X^\circ$  成立。

(iii)  $X$  是凸集, 且如果  $X^\circ \neq \phi$ , 則  $\bar{X} = \bar{X}^\circ$ 。

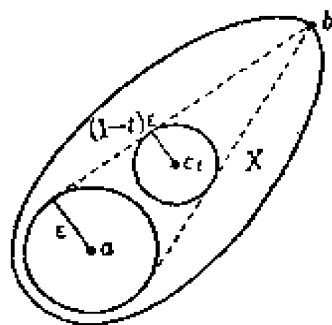


图 4.2

**証明** 首先,由于  $X \supset X^0$ , 故立即就有  $\bar{X} \supset \bar{X}^0$ . 反之, 选择一个内点  $a$ , 則因对于任意的  $b \in \bar{X}$ , 有  $[a, b) \subset X^0$  成立. 故在  $X^0$  中, 存在着与  $b$  任意接近的点, 因而可知  $b \in \bar{X}^0$ .

(iv)  $X$  是凸集, 如果  $X^0 \neq \phi$ , 則  $(\bar{X})^0 = X^0$ . 就是說,  $X$  虽然附加上边界, 但开核却不再扩大<sup>①</sup>.

**証明** 由  $\bar{X} \supset X$  可得  $(\bar{X})^0 \supset X^0$ , 故我們只要反过来証明  $(\bar{X})^0 \subset X^0$  就行了. 如果取任意的  $c \in (\bar{X})^0$ , 則对于充分小的  $\varepsilon > 0$ , 有  $U(c, \varepsilon) \subset \bar{X}$ . 同时, 根据性质(iii), 由于  $(\bar{X})^0 = (\bar{X}^0)^0 \subset \bar{X}^0$ , 故  $c \in \bar{X}^0$ . 因而

$$U(c, \varepsilon) \cap X^0 \neq \phi.$$

现在把这二个集合的公共部分的点  $a$  取一个, 則  $a = c + e$ ,  $\|e\| < \varepsilon$ , 而  $a \in X^0$ . 在这里, 若注意到  $b = c - e \in U(c, \varepsilon) \subset \bar{X}$  适合3)的情况, 則可得到

$$c = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \in [a, b) \subset X^0.$$

4) 如果  $R^n$  的凸集  $X$  有  $X^0 \neq \phi$  的关系, 且为有界閉集(即紧集)<sup>②</sup>, 則  $X$  叫做  $n$  維凸体. 任意二个  $n$  維凸体  $X, Y$  是同胚的. 就是說, 存在着一个从  $X$  到  $Y$  上的一一且双方連續的映象.

**証明** 球邻域  $U(a, \varepsilon)$  的閉包有

$$\bar{U}(a, \varepsilon) = \{x | \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$$

成立, 所以是一个  $n$  維凸体, 它叫做閉球邻域, 并記为  $\bar{U}(a, \varepsilon)$ . 如果能証明  $X$  与  $\bar{U}(0, 1)$  是同胚的, 則以  $\bar{U}(0, 1)$  作为媒介,  $X$  与  $Y$  的同胚就立即可以明白了. 現在, 选取  $X$  的一个内点, 把此点选作坐标原点. 以原点为端点的半直綫  $l$  上必然存在着  $X$  的境界点. 这是因为  $l$  是閉集, 由于  $X$  是有界閉集, 故  $l \cap X$  也是有界

① 在  $X^0 = \phi$  的情况, (iv) 亦是成立的. 參看 § 6.

② 可參看入江[23]第 101 頁定理 16, 河田[22]第 36 頁的 14.10. (即本丛书賴英华譯《集合·拓扑·測度》第 41 頁的定理.——譯者注)

閉集,从而在这集合上連續函数  $h(x) = \|x\|$  达到其最大值<sup>①</sup>,最大点是境界点的緣故。根据前面所讲的(i),在  $l$  上除此以外是沒有境界点了。現在把  $X$  的全部境界点的集合記为  $X^r$ ,根据以上討論,有  $X^r \neq \emptyset$ ,  $X^r \not\ni 0$ , 所以  $g(x) = x/\|x\|$  是从  $X^r$  到  $\bar{U}(0, 1)$  的境界,即到向球面

$$C(0, 1) = \{y \mid \rho(0, y) = 1\}$$

的連續映象。对于  $C(0, 1)$  上任意点  $y$ , 以 0 为端点并通过  $y$  的半直綫  $l$  上至多存在着一个  $X^r$  的点  $x$ , 并且  $g(x) = y$  成立。同时由于  $l$  上以外显然沒有  $y$  的原象,

所以这个  $g$  是从  $X^r$  到  $C(0, 1)$  上的一一且連續的映象。 $X^r$  显然是有界的,并且由于是  $X^r = \bar{X} \cap \bar{X}^c$  的閉集,因而由于紧性,  $g$  实际上是拓扑映象<sup>②</sup>。于是可以得到从

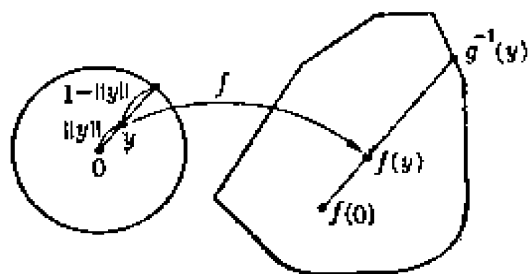


图 4.3

$C(0, 1)$  到  $X^r$  上的拓扑映象  $g^{-1}(y)$  ( $g$  的逆映象)。在这里,从  $\bar{U}(0, 1)$  到  $X$  上的映象  $f$  应满足

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(y) = \|y\| g^{-1}(y/\|y\|) \quad (y \neq 0). \end{cases} \quad (4.5)$$

故它是一一且連續的映象。再由  $\bar{U}(0, 1)$  的紧性可知  $f$  是拓扑映象。在作出映象(4.5)时,如果在  $\bar{U}(0, 1)$  上  $y \neq 0$ , 由于  $y$  恒滿足  $0 < \|y\| \leq 1$ , 故要注意  $f(y)$  成为原点与  $g^{-1}(y/\|y\|)$  的凸結合,这个凸結合的系数是  $1 - \|y\|$ ,  $\|y\|$ 。

## §5 凸 包

任意地选取  $R^n$  的集合  $X \neq \emptyset$  中有限个点而作成的一切凸結

① 参看入江[23]第96頁定理10, 高木[24]第31頁定理13.

② 参看河田[22]第31頁定理12.7 (中譯本, 第36頁定理12.7, ——譯者注), 入江[23]第101頁定理15.

合的集合,称为  $X$  的**凸包**,記为  $O(X)$ .

$$O(X) = \left\{ \sum_{i=1}^s \alpha_i x^i \mid x^i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \right\}. \quad (5.1)$$

对于  $O(X)$ , 显然(5.1)成立, 这里  $x^i$  的个数、选出方法、系数  $\alpha_i$  的取法等等是完全任意的。很明显,  $O(X) \supset X$ , 实际上,  $O(X)$  是包含  $X$  的最小的凸集。

对于  $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ , 有

$$\lambda \sum_{i=1}^s \alpha_i x^i + \mu \sum_{j=1}^t \beta_j y^j = \sum_{i=1}^s \lambda \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^t \mu \beta_j y^j.$$

$\lambda \alpha_i, \mu \beta_j \geq 0$ , 并且, 这些系数的总和等于 1, 所以  $O(X)$  的任意二个点的凸結合是属于  $O(X)$  的。所以,  $O(X)$  本身确实是凸集。此外, 由于包含  $X$  的任意凸集必須包含  $X$  中点的凸結合, 所以必須包含  $O(X)$  的全部点。由以上所述, 可知  $O(X)$  是包含  $X$  的最小的凸集。

**正一次組合与凸組合** 在上述(5.1)中, 同时选择  $x^i$  的个数实际上至多只有  $n+1$  个。为了闡明这个事实, 就非負一次組合以及正一次組合証明类似的结果, 再通过与凸組合的关系, 推导出所需要的結果。

設  $x^i (i=1, 2, \dots, s)$  的一次組合为

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x^i, \quad (5.2)$$

当系数  $\alpha_i$  是非負数时, 称为非負一次組合; 当所有的系数都为正数时, 叫做正一次組合。当  $x$  是有限个点  $x^i (i=1, 2, \dots, s)$  的非負一次組合(5.2)时, 由于系数  $\alpha_i \geq 0$  不一定是唯一确定的, 所以尽可能选择  $\alpha_i$  为各种各样数值, 以使得具有正系数的  $x^i$  的个数为最小。此时, 正系数的最小个数至多是  $n$ , 就是說, 它与  $R^n$  的維数相等。

**証明** 設在(5.2)中, 系数  $\alpha_i$  选取了种种数值, 此时, 設

$$x = \sum_{i=1}^t \beta_i x^i \quad (t \leq s) \quad (5.3)$$

已由具有最小个数的正系数来表示了。适当地改编号碼  $i$  之后，不妨假定开始的  $t$  个是正系数。此时，設  $t > n$ ，則由于  $t$  个点  $x^i$  是綫性相关的，所以要滿足下列系数不全为零的綫性关系：

$$\sum_{i=1}^t \gamma_i x^i = 0. \quad (5.4)$$

按照假定，在(5.4)的非0系数里有正数，如令

$$\min_{\gamma_i > 0} \beta_i / \gamma_i = \theta,$$

則  $\theta$  是大于0的，将(5.4)乘  $\theta$ ，并从(5.3)里减去，則得到

$$x = \sum_{i=1}^t (\beta_i - \theta \gamma_i) x^i. \quad (5.5)$$

(5.5)中由  $\theta$  的定义

$$\beta_i - \theta \gamma_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, t)$$

可知，至少有一个是0。所以， $x$  是最多  $(t-1)$  个  $x^i$  的非負一次組合。如再适当地選擇系数，可由最多  $(t-1)$  个  $x^i$  的正系数的一次組合来表現。于是产生了矛盾。

作为关系到正一次組合的这个定理的应用，首先可用来导出关于凸包的定理。对于  $R^n$  的点，在其第  $n+1$  个分量上附加1，这样得到  $R^{n+1}$  的点  $\bar{x} = (x, 1)$ 。只要  $R^{n+1}$  中的  $\bar{x}$  是  $\bar{x}^i (i=1, 2, \dots, s)$  的非負一次組合，那末  $R^n$  中的  $x$  就成为  $x^i$  的凸組合了。两者是具有同样内容的。在  $R^{n+1}$  上， $\bar{x}$  用  $\bar{x}^i$  的非負一次組合来表示时，正系数的最小个数至多是  $n+1$ 。这就証明了我們想要推出的定理。

## §6 单纯形

若  $X$  是由  $(n+1)$  个点  $x^i \in R^n (i=0, 1, \dots, n)$  所形成，且  $\bar{x}^i = (x^i, 1)$  在  $R^{n+1}$  上是綫性无关的，則  $C(X)$  称为由頂点  $x^0, x^1, \dots,$



$x^n$  所張成的  $n$  維單純形。為行文方便起見，記為  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$ 。

例如，一個點  $x^0$ ；以兩個點  $x^0, x^1$  為端點的綫段  $[x^0, x^1]$ ；以三個點  $x^0, x^1, x^2$  為頂點的三角形；以四個點  $x^0, x^1, x^2, x^3$  為頂點的四面體，分別是 0, 1, 2, 3 維的單純形。

分別給予各個點  $x^i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) 以質量，使其總質量為 1，這時其重心的集合將是由這些點所張的  $n$  維單純形。由於  $\hat{x}^i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) 是綫性無關的，從而把某個點用  $x^i$  的凸組合表示的係數  $\alpha_i$  是唯一地確定的。因此，通常的重心  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} x^i$  是不能由少於  $n+1$  個正係數來表示的。此時，在  $R^n$  中凸組合的正係數的最小個數的上界  $n+1$  正好適合。

如果  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^n} \ni x, x = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ ，則由

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \alpha_i \|x^i\| \leq \max_{0 \leq i \leq n} \|x^i\| \sum_{i=0}^n \alpha_i = \max_{0 \leq i \leq n} \|x^i\|,$$

所以單純形是有界集。

此外，從  $n+1$  個頂點  $x^i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 除去一個點  $x^i$  後殘留下來的  $n$  個點，可以定出  $R^n$  的超平面  $L_i$ 。如果在由  $L_i$  所決定的半空間中，把包含  $x^i$  的記為  $X_i$ ，則根據解析幾何中眾所周知的事實，有

$$\overline{x^0 x^1 \cdots x^n} = \bigcap_{i=0}^n X_i.$$

因為各個  $X_i$  是閉集，所以作為它們的公共部分的單純形仍為閉集。因而單純形是有界閉集，即成為緊集。此外，由於  $X_i$  的開核  $X_i^0$  是從  $X_i$  中除去超平面  $L_i$  後所殘留下來的部分，所以  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$  的開核為  $\bigcap_{i=0}^n X_i^0$ 。就是說，在單純形的點裡面，所有凸組合係數全是正的點是內點，係數中有 0 的是境界點。

**注意 1** 取  $R^n$  中任意的非空凸集  $X$ ，將包含着  $X$  的  $R^n$  的維數最低的綫性子空間中的一個記為  $R^m$ ，則  $X$  必包含  $R^m$  的內點。根據  $R^m$  的規定方

法,可知存在着下列事实:对于  $X$  的适当的  $m+1$  个点  $x^i (i=0, 1, 2, \dots, m)$ ,  $\bar{x}^i$  是线性无关的。因  $X$  包含着由这些点所张成的  $m$  维单纯形,由上所述可知,这个单纯形必含有  $R^n$  的内点。因此,  $R^n$  的有界凸集是  $m$  维凸体(对适当的  $m (0 \leq m \leq n)$  而言)。

**注意 2** §4 (iv) 的结果在  $X^0 = \phi$  的情况下也是成立的。为了说明这一点,可由  $(\bar{X})^0 \neq \phi$  来导出  $X^0 \neq \phi$ 。如取  $\bar{X}$  的内点  $c$  与其适当的邻域  $U(c, \epsilon) \subset \bar{X}$ , 则显然  $U(c, \epsilon)$  包含着某个  $n$  维单纯形  $\overline{x^0 x^1 \dots x^n}$ 。但是,由于各个  $x^i \in \bar{X}$ , 故若在  $x^i$  的充分小邻域取  $X$  的点  $y^i$ , 则这些点可认为是由扩张  $n$  维单纯形  $\overline{y^0 y^1 \dots y^n}$  而得的。因而

$$\phi \neq (\overline{y^0 y^1 \dots y^n})^0 \subset X^0.$$

**单纯形分划** 现在来考察把一个单纯形  $S = \overline{x^0 x^1 \dots x^n}$  分划成几个  $n$  维小单纯形的方法。虽然分划的方法很多很多,但其中较重要的一种是所谓重心分划。我们先来说明低维情况下的分划方法,再进而叙述高维的情况。

(0) **0 维单纯形** 由于一个点  $x^0$  不能够按上述办法来分划,所以它本身就可看作重心分划。

(1) **一维单纯形** 取  $\overline{x^0 x^1}$  的重心  $y$ , 就可以分划为两个一维单纯形  $\overline{x^0 y}, \overline{x^1 y}$ 。

(n) **n 维单纯形**  $\overline{x^0 x^1 \dots x^n}$  的  $n+1$  个  $n-1$  维的边单纯形<sup>①</sup>, 可以分别分划为  $n!$  个  $n-1$  维小单纯形。取  $S$  的重心  $y$ , 作这些  $n-1$  维小单纯形  $T$  与  $y$  的凸包,则它是  $n$  维的单纯形。故  $S$  总共可以分划为  $(n+1)!$  个这样的小单纯形。

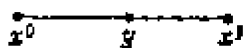


图 6.1

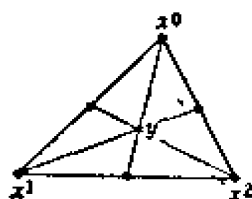


图 6.2

<sup>①</sup> 以单纯形  $\overline{x^0 x^1 \dots x^n}$  的顶点  $x^0, x^1, \dots, x^n$  的一部分所作成的单纯形  $\overline{x^i x^j \dots x^m}$ , 叫做  $m$  维边单纯形。

**單純形的直徑** 所謂集合  $X$  的直徑, 可由下式來定義:

$$d(X) = \sup \rho(x, y) \quad (\text{對一切 } x, y \in X).$$

這樣, 在  $n$  維單純形  $S$  上, 由超過一次的重心分劃所得的小單純形  $S'$  的直徑為

$$d(S') \leq \frac{n}{n+1} d(S). \quad (6.1)$$

**証明** 首先, 對於  $S = \overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$ , 設

$$\delta = \max_{0 \leq i, j \leq n} \rho(x^i, x^j),$$

則顯然有

$$d(S) \geq \delta.$$

因任意的  $a, b \in S$  是  $x^i$  的凸組合, 故以  $\lambda_i, \mu_i$  為凸組合的系數, 則

$$\begin{aligned} \rho(a, x^j) &= \|a - x^j\| = \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i - x^j \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i (x^i - x^j) \right\| \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i \rho(x^i, x^j) \leq \delta. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \rho(a, b) &= \left\| a - \sum_{j=0}^n \mu_j x^j \right\| = \left\| \sum_{j=0}^n \mu_j (a - x^j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^n \mu_j \rho(a, x^j) \leq \delta. \end{aligned}$$

所以

$$d(S) = \delta.$$

對  $n=0$ , (6.1) 顯然成立, 我們假定關於  $n-1$  維以下的單純形 (6.1) 是成立的。  $S'$  的頂點的一個是  $S$  的重心

$$y = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^i,$$

設其他頂點為  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , 則  $\overline{y^1 y^2 \cdots y^n}$  是由  $S$  的  $n-1$  維邊單純形  $T$  的重心分劃而得的單純形, 故由歸納法假設

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i, j \leq n} \rho(y^i, y^j) &= d(\overline{y^1 y^2 \cdots y^n}) \leq \frac{n-1}{n} d(T) \\ &\leq \frac{n}{n+1} d(S), \end{aligned} \quad (6.2)$$

且

$$\begin{aligned} \rho(y, x^j) &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^i - x^j \right\| \\ &\leq \sum_{i \neq j} \frac{1}{n+1} \|x^i - x^j\| \leq \frac{n}{n+1} d(S). \end{aligned}$$

因而, 对  $S$  的任意点  $a$ , 亦即对  $x^0, x^1, \dots, x^n$  的凸组合, 有

$$\rho(y, a) \leq \frac{n}{n+1} d(S),$$

特别, 对  $a = y^j (j=1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\rho(y, y^j) \leq \frac{n}{n+1} d(S). \quad (6.3)$$

故由 (6.2), (6.3) 得

$$d(S') \leq \frac{n}{n+1} d(S).$$

## §7 价格与基本单纯形

在  $R^n$  的点  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  中满足

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

的点的集合, 是以  $e^i = (\overbrace{0, \dots, 0}^i, 1, 0, \dots, 0) (i=1, 2, \dots, n)$  为顶点的  $n-1$  维单纯形  $\overline{e^1 e^2 \cdots e^n}$ . 由于在下一章中常常要把它用作  $R^n$  的基本单纯形, 现在我们用记号  $S_n$  来表示它<sup>①</sup>. 因  $S_n$  在  $R^n$  中的开核是空的, 故把这看作为  $n-1$  维凸体的开核可用  $S_n^0$  来表示。

<sup>①</sup> 由于  $S_n$  是  $n-1$  维单纯形, 照理说应当记为  $S_{n-1}$ , 但为了叙述简单起见, 就把它记为  $S_n$  了。

$S_n^0$  是在  $S_n$  的点中满足  $p_j > 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 的点的集合。虽然,

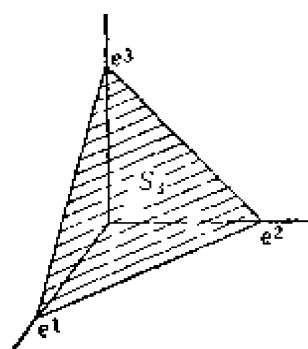


图 7.1

$S_n$  的点可以解释为由  $n$  个元素所构成的空间的概率分布,但是在经济理论上,它是用来表示被规范化(normalized)的价格体系的。

如果对一般形式的价格体系  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $p_j \geq 0$ ,  $p \neq 0$  乘上正数  $\lambda = 1 / \sum_{j=1}^n p_j$

加以规范化,则  $\lambda p \in S_n$ 。当成为分析对象的各个经济上的量,其相互间的关系是关于价格的零次齐次函数时,由于只有相对价格(即各种财货的价格比)才是本质上重要的,所以只限于考察规范化的价格体系这一点是可以容许的。

将  $p$  规范化的方法,除此以外还有很多。例如,将某种财货的价格作为 1 的方法等等。为了下一章中理论的考察,希望确保任何一种财货的价格皆可为 0 的可能性,采用以下的步骤。当价格体系为  $p$ , 财货组为  $x$  时,内积  $px$  表示  $x$  的价额。如果构成财货组的每种财货各取 1 个单位,即  $u = (1, 1, \dots, 1)$ , 则由于  $pu = \sum_{j=1}^n p_j$ , 再乘上一个使  $u$  的价额变为 1 的正数  $\lambda$  后,便是上述的规范化方法。

由于  $S_n$  是紧的凸集,上述规范化的步骤当在把问题作数学处理时极为有效。这些将在下一章中讨论。

**紧集的凸包**  $R^n$  的非空紧集  $X$  的凸包  $O(X)$  同时也是紧的。这个定理虽然稍为有点特殊,由于它为第 2 章中严密的讨论所必需,故在这里我们给出它的证明。

**证明** 有界这一点显然能成立,现在直接来证明  $O(X)$  是紧的。由 §5 可知,  $O(X)$  是  $X$  的  $n+1$  个任意点的凸组合的全体之集合。若作  $n+1$  个  $X$  与基本单纯形  $S_{n+1}$  的直积

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n+1} \times S_{n+1}, \quad (7.1)$$

則由于直积的因子  $X$ ,  $S_{n+1}$  是紧的, 所以 (7.1) 也是紧的<sup>①</sup>。因为  $C(X)$  是从这紧集 (指直积 (7.1)) 到  $R^n$  的連續映象

$$(x^0, x^1, \dots, x^n, p) \rightarrow \sum_{i=0}^n p_i x^i$$

下的象, 所以它是紧的。这是因为紧集在連續映象下的象也是紧的缘故<sup>②</sup>。

**紧的凸集的矢量和** 在 §2 的应用例 2 中, 已証明了有限个凸集的矢量和是凸集, 由于那时候所使用的仿射映象是連續的, 故若这些凸集是紧的, 則直积  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  也是紧的, 因此, 連續映象下的象的矢量和也是紧的。

## §8 效用指标与消费者行动

經濟上的財貨, 最終目的都是为了滿足消費者直接或間接的需要。就这种意义而言, 消費者对給与他的各种財貨的欲望滿足的程度, 即所謂**效用** (utility) 來說, 是純粹由消費者个人来判断其价值的。以上的看法, 是 S. Jevons, C. Menger, L. Walras 等人的**边际效用学派**的傳統观点。在本书中, 不介紹这个学說的历史, 而专从数学的观点来看問題。

消費者对任意两个財貨組

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

究竟爱好哪一个? 或者两者都同等程度地爱好? 作为其比較标准, 我們用**二項关系**  $x\rho y$  来表示, 它应当滿足以下一些条件。

給定一个可以判断其效用的財貨組全体的集合  $X$  (习惯上, 設  $X = R_+^n$ ), 則对于  $x, y, z \in X$ , 下列关系:

$$x\rho y \quad \text{或} \quad y\rho x \tag{8.1}$$

至少有一个成立, 或两者同时成立。当  $x\rho y, y\rho x$  两者同时成立时, 則称  $x$  与  $y$  **无差別** (indifferent)。关系  $\rho$  应当滿足**反射律**

① 見入江[23]第 94 頁定理 8。

② 見入江[23]第 93 頁定理 7。

$$x\rho x, \quad (8.2)$$

并且推演律

$$\text{若 } x\rho y, y\rho z, \text{ 則 } x\rho z \quad (8.3)$$

也成立。就是說，被規定的  $\rho$  應理解為在  $X$  上具有完全的順序關係。但必須要注意  $x \neq y$ ，而  $x$  與  $y$  無差別的這一情況。當  $x$  與  $y$  具有無差別的關係時，記為  $xIy$ ， $I$  是一個**等價關係** (equivalence relation) ①，為了將含於  $X$  中的財貨組加以分類，將彼此是無差別的東西歸為一個集合。就是說，把  $x \in X$  任意地固定後，則所謂等價類  $\{y \mid y \in X, xIy\}$  中的各個元素稱為**無差別象** (indifference map)。任意的  $y \in X$  不論屬於哪一個無差別象，它就不會屬於二個互和有差異的象。

如果  $x, y \in X$ ，由於根據一般慣例，對  $x$  與  $y$  的凸組合可以作出效用判斷，所以  $[x, y] \subset X$ 。就是說， $X$  作為凸集合，尤其是它成為經濟活動的集合時，將其假定為閉集是很自然的。根據效用判斷的性質，可以對記號  $\rho$  作下面的假定：當  $x, y, w \in X$  時，如果

$$z \in [x, y], x\rho w, y\rho w, \text{ 則 } z\rho w. \quad (8.4)$$

這個性質是說，若設  $w$  無差別，或者比之更好的財貨組的全体所成的集合為  $X_w = \{x \mid x \in X, x\rho w\}$ ，則  $X_w$  不外乎是凸集而已 ②。

在  $X$  的點  $x$  上給與實數值  $u(x)$ ，當按  $\rho$  的順序與函數值  $u(x)$  的大小完全對應時，則  $u(x)$  叫做  $\rho$  的**效用指標**。若  $u$  是一個效用指標， $f$  是嚴格單調增加函數，則  $v(x) = f(u(x))$  也是效用指標。在  $\rho, X$  上需要加上什麼樣的條件，才可以證明效用指標的存在性？象這樣的問題是饒有趣味的，雖然如此，在本書中沒有余裕來涉及這個問題，只好在別的機會再詳細討論它 ③。現在我們

① 參看河田[22]第10頁(中譯本,第12頁——譯者注)。

② 有時也稱為凸選好順序(convex preference ordering)。

③ 關於這個問題，例如，可以參考：G. Debreu: Representation of a preference ordering by a numerical function; Decision processes (M. R. Thrall, O. H. Coombs and R. L. Davis, ed., 1954)。

不妨假定效用指标的存在性,继续叙述下去。

如果  $\rho$  满足 (8.4),  $\rho$  的效用指标也满足

若  $z \in [x, y]$ , 且  $u(x), u(y) \geq \omega$ , 则

$$u(z) \geq \omega, \quad (8.5)$$

反之亦成立, 这里的  $\omega$  是实数。满足 (8.5) 的函数叫做**拟凹函数**。

若  $-u(x)$  为拟凹函数, 则  $u(x)$  叫做**拟凸函数**。

拟凹函数的条件 (8.5), 比众所周知的**凹函数**的条件:

如果  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ , 则

$$\alpha u(x) + \beta u(y) \leq u(\alpha x + \beta y) \quad (8.6)$$

来得弱一些。所谓凸函数  $u(x)$  是  $-u(x)$  为凹的函数。虽然凹(凸)函数在  $X(\subset R^n)$  的开核  $X^0$  (非空集) 上很显然是连续的<sup>①</sup>, 然而拟凹(拟凸)函数却不一定是连续的。因而, 对于效用指标, 除了拟凹性以外, 通常还要设置连续性的假定。Arrow-Debreu 对于效用指标, 除了连续性之外, 还假定:

如果  $z \in (x, y), u(x) > u(y)$ , 则

$$u(z) > u(y). \quad (8.7)$$

在连续性的假定下, 如果 (8.7) 成立, 则拟凹性也成立<sup>②</sup>, 然而反过来则不一定成立。如图 8.1 所示, 若  $y$  的属于无差别的象具有“厚度”, 则在綫段  $(x, y)$  上的点  $z$  与  $y$  是无差别的。由是可知, 拟凹性的规定是比较 (8.7) 来得弱的假定。

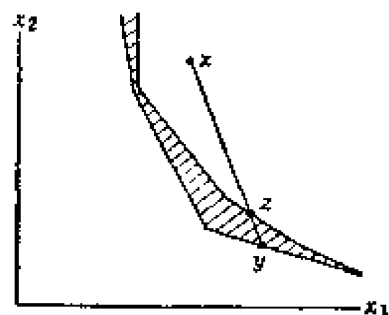


图 8.1

习惯上, 象上面所說的, 将  $X$  设为正象限  $R_+^n$  的全体或者其子集, 当成为效用判断对象的財貨, 只是所謂消費財貨时, 由于通常需要的是非負的量, 故这样的假定是适当的。消費者也可以作为被雇佣者, 因而也可以看成是出卖劳动力, 因而是其他基本生产要素的供給者。如果这一些类型的財貨对于消費者說具有“非

① 例如, 可参看 Bourbaki [3] 第 92 頁。

② 如果  $u(x) > u(y) \geq \omega$ , 則显然由 (8.7) 可推出 (8.5)。若  $u(x) = u(y) = \omega$  且  $z \in [x, y]$ ,  $\omega > u(z)$ , 則由条件 (8.7) 与  $u$  的連續性可知, 对于与  $z$  充分接近的  $a \in (y, z)$ , 有  $\omega > u(a) > u(z)$ 。然而, 由于  $z \in (x, a)$ , 并且  $u(x) = \omega > u(a)$ , 故由条件 (8.7), 得出  $u(z) > u(a)$ , 这样就产生了矛盾  $u(z) > u(z)$ 。



效用”，則我們就可以對具有負的分量的財貨組來作效用判斷了。Arrow-Debreu 從這種觀點出發，認為  $X$  不一定要是包含正象限的凸集。然而，即使在此種情況下，也要假定  $X$  下面有界。所謂下面有界的意思，是指：有一些實數  $\xi_j (j=1, 2, \dots, n)$ ，對於一切  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ ，成立着

$$x_j \geq \xi_j \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

在一定期間，譬如說，24 小時以內可能供給的勞動量是有限的，此外，維持生命還不夠的消費財貨的數量是不能成為效用判斷的對象的。基於這樣的理由，所以為何要假定下面有界就很明白了。

**效用最大原則** 在完全競爭的假定之下，各個消費者把價格看成是用自己的力量不能改變的所與條件，換言之，把它當作一定的限制條件進行活動的。在給定的價格體系  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0, p_j \geq 0$  給定的所得  $I > 0$  之下，消費者所購進的財貨組  $x \in X$  必須服從限制條件

$$px \leq I. \quad (8.8)$$

(8.8) 稱為**預算制約式**(budget constraint)。在這個條件之下，消費者可以選擇能使效用指標  $u(x)$  為最大的財貨組  $x \in X$  的需要量。這樣選擇出來的  $x$  所表示的總是在最終價格與收入作為所與條件給定下的消費者的購入計劃，乃至訂貨單；是一種事前的東西，不一定與事後的實現值相一致。由上述的看法可知，價格與所得的各個值是對应的，作為清單中的需要量因而可以得到確定，這樣，由價格  $p$ ，收入  $I$  到財貨組  $x$  的對應稱為**需要函數**。

關於需要函數，在把經濟體系全體作為均衡問題來處理的第 2 章中將要談到。這裡，我們來證明，在一切財貨的價格  $p_i$  為正時，並在預算制約式之下，使效用指標實際上達到最大值的最適當的財貨組  $x$  的全體，將成為一個凸集。

首先，由於這個最大值問題的變域是

$$X \cap \{x | px \leq I\},$$

故由  $x \in X, px \leq I$ , 有

$$\xi_j \leq x_j \leq I/p_j \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

所以这变域是有界的。其次,  $X$  与  $\{x | px \leq I\}$  同时都是闭的凸集, 故作为其公共部分的变域(非空集)仍然是闭的凸集, 换言之, 是紧的凸集。因此, 由众所周知的 Weierstrass 定理<sup>①</sup>, 连续函数  $u(x)$  在这个变域上达到最大值。现在, 对于  $p, I$ , 把使得  $u(x)$  为最大的变域内  $x$  的集合记为  $\varphi(p, I)$ 。设  $x, y \in \varphi(p, I)$ , 并将上述的最大值用  $\omega$  表示, 则有

$$u(x) = u(y) = \omega.$$

此外, 由于变域为凸集, 所以, 它包含线段  $[x, y]$ , 更进一步, 由于  $u(x)$  为拟凹函数, 故若  $z \in [x, y]$ , 则  $u(z) \geq \omega$ 。但是, 根据记号  $\omega$  的意义, 必有  $\omega = u(z)$ 。结果, 有

$$u(z) = \omega, \quad \text{而} \quad z \in \varphi(p, I).$$

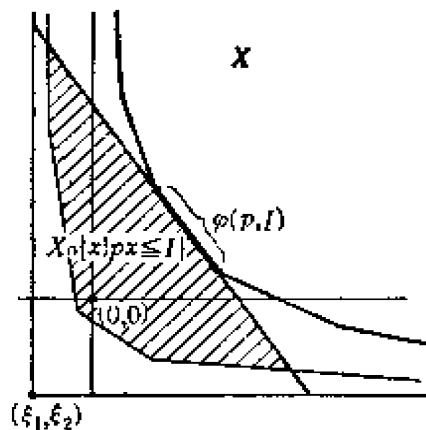


图 8.2

如上述证明, 由于  $\varphi(p, I)$  的函数值是集合, 所以需要函数一般是多值函数或多值映射。如果用别的表示法, 则使点  $(p, I)$  对应于集合  $\varphi(p, I)$ , 是一种点对集合映射。在这里, 虽然需要函数的变数是  $p, I$ , 但当经济体系全盘的关系显得重要时,  $I$  成为  $p$  的一次齐次函数, 其结果是, 限制条件亦成为一次齐次的, 最后  $\varphi(p, I)$  是关于  $p$  成为 0 次齐次的了。由于这个缘故, 所以只要考虑规范化了的  $p$  就可以。

**关于效用指标的特殊假定** 对于  $R^n$  的两个点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 当  $x_j \geq y_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 时, 记为  $x \geq y$ ; 当  $x \geq y$  而  $x \neq y$  时记为  $x \gg y$ ; 在  $x$  的各坐标分量比  $y$  的各对应分量大的时候, 记为  $x > y$ 。如果照这样的记法, 则  $R_+^n$  是  $x \geq 0$  的点的集合, 开核  $(R_+^n)^\circ$  是  $x > 0$  的点的集合。

当  $x, y \in X$  且  $x \geq y$  时, 若  $u(x) \geq u(y)$ , 则称  $u(x)$  为单调递增

① 见入江[23] 96 页定理 10, 高木[24] 31 页定理 13。

的。若  $x \geq y$ , 而  $u(x) > u(y)$  时, 則称为**严格单调递增**。在財貨的数量愈多愈好的这种意义下, 关于多数消費財貨与劳动(說得更正确些, 是負的劳动量, 因而把它叫做閑暇 (leisure) 会更好一些), 这样規定是妥当的。当  $u(x)$  是严格单调递增时, 对于任意的  $x \in X$ , 若可选择充分小的正数  $\lambda > 0$ , 使当  $x_\lambda = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \lambda, x_{j+1}, \dots, x_n) \in X$  时, 則有  $u(x_\lambda) > u(x)$ 。在 Arrow-Debreu 的不一定以  $u(x)$  的严格单调性作为前提的情况之下, 对于任意的  $x \in X$ , 可以选择适当的  $\lambda > 0$ ,  $x_\lambda \in X$ , 并且  $u(x_\lambda) > u(x)$  成立, 則把第  $j$  种財貨叫做**被需求的財貨**。根据以上所述, 因  $u(x)$  是严格单调的, 对任意的  $x \in X$ , 若  $x + R_+^n \subset X$  (矢量和) 成立, 則所有的財貨都是被需求的財貨。

当  $u(x)$  具有在  $X$  全部区域上的最大值时, 将最大点  $x$  叫做**飽和点**。当存在着被需求財貨的时候, 飽和点是不存在的。

**利潤最大原則** 現在我們来研究: 一个以完全竞争为其主导思想而活动的生产单位(企业等), 在規定的价格体系  $p \geq 0$  之下, 究竟从所有的生产活动集合  $Y$  之中, 应采用什么样的生产活动  $y$ 。如前所述, 由于在  $y$  的諸分量中, 正的表示产品, 負的表示投入物, 內积  $py$  表示从产品的总价值中减去生产費用后的余額, 換言之, 即表示利潤。故所謂在价格  $p$  之下最为有利的生产活动是: 对于  $y \in Y$ , 利潤  $py$  成为最大的那种活动。为了使利潤最大, 生产单位当然尽量采取这样的生产活动。这正是在規定的价格之下决定生产計劃的一項原則, 它叫做**利潤最大原則**。但是要注意, 这是与前面所讲效用最大的情况有区别的, 譬如說, 虽然  $p$  为正, 然而  $\max_{y \in Y} py$  却不一定存在。

关于这一个微妙的問題, 留待第2章再来討論。

## 第2章 Walras 式平衡模型与不动点定理

在以前几节中时而讲到的材料，主要是对生产 (§ 3, § 8) 与消费者需要 (§ 8) 进行逐个的分析。作为经济主体的行动原则，在管理生产企业方面显然是利润最大原则，而作为一个对所需要财货的选择主体的消费者（或家庭经济）来说，则是效用最大原则。在完全竞争的假定之下，对应于给定的价格，根据上述这些原则，可以在一方面决定生产量（即供给），而另一方面决定需要。然而，这样所决定的需要与供给的预定计划，总是与作为限制条件而任意给定的价格相对应的。由于需要与供给不一定会平衡，因此在不平衡的情况下，预定计划的实现也就不可能了。只是对于某些特定的价格，计划所要求的供求得到平衡，在两种预定计划量相一致的点上定出作为实现值的需要、供给和价格。以上所述，是从 Walras, Pareto 以来成为一般平衡理论的基础思想。然而，作为这样的接近法的基础定理之一，必须首先明确所谓“需要计划 = 供给计划”这样的关系式中是不包含矛盾的。换言之，如果把这关系式用数学方法表示成为方程或不等式时，它必须有具备经济学意义的解。由于问题的微妙和复杂的数学特性，关于确立解的存在性，直到现在还没有被认识到。这期间，关于一般平衡理论的基础研究，只不过是重复着将未知数个数与方程个数作比较的那些工作。从 Walras, Pareto 开始，现代数理经济学家如 Hicks, Samuelson 等人的研究都是建筑在这样很脆弱的基础之上。但是，作为例外，应当特别提一下 von Neumann 模型<sup>①</sup>与由 A. Wald 作出的平衡解的存在证明<sup>②</sup>。为了把经济模型数学地定式化，确证解的存在性，为经济理论奠定坚实的基础，以及进行后面的详细分析，这些（指 von Neumann 与 A. Wald 的工作）都是遵循理论上正确的方向的成果。但是，虽然 von Neumann 模型是结构完美，具有特色的模型，但在许多地方与正统的 Walras 等的平衡模型有许多不同之处。此外，尽管其所处理的模型也称为 Walras-Cassell 体系，Wald 的结果也是在放弃后文所述的 Walras 法则

① 参看 von Neumann [10] 二階堂[13], [14]等, 后者包含着由分离定理而得的简单证明。

② 参照 Wald [18], [19], Kuhn [7].

这一点和为此所付的代价而又要采用种种狭隘的假定这一点上来取得的,故它们对于构成 Walras 式平衡理论的基础都是不够的。关于满足 Walras 式法则的正统的平衡模型的解的存在问题,从 Walras 以来经历了很长一段空白时期,最近好不容易才肯定得到了解决。以 Arrow 与 Debreu 的共同研究为起点的 McKenzie, Gale 与二階堂等人的工作是沿着这一方向所取得的成果<sup>①</sup>。以下,将要叙述 Walras 模型的简练的、近代的面貌,并利用凸集的重要性质作为辅助,来证明解的存在性。

### §9 单纯交换模型

为了很快具体地掌握平衡解存在问题的轮廓,先从简单的情況开始。虽说是简单,这里所讲的单纯交换模型却具备着问题本质的全部要点,后面要讲的一般的模型不过是在这上面再加上一层画工的彩色。这样的说法是并非言过其实的。

设有  $m$  ( $m \geq 2$ ) 个消费者  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), 各个  $i$  拥有的財貨組为

$$\zeta^i = (\zeta_1^i, \zeta_2^i, \dots, \zeta_n^i) \geq 0, \quad (9.1)$$

至于  $\zeta^i$  如何归为  $i$  所有,对今后所要考虑的问题并不具有重要意义,譬如說,設他們是自耕农,那末可以将  $\zeta^i$  看作由他們劳动所得的产品的数量。現在我們来看将这些  $\zeta^i$  在市場上进行交换的问题。

首先,假設

$$\sum_{i=1}^m \zeta^i > 0. \quad (9.2)$$

(9.1) 是各个  $i$  实际拥有的財貨,而 (9.2) 則是成为交换对象的各人所具有的財貨的总数,显然各財貨的存量都是正数,形成交换媒介的是价格  $p > 0$ 。

現在,設各个  $i$  具有效用指标  $u_i(x)$ , 这些是在正象限  $R_+^n$  上

① 參看 Arrow-Debreu [2], Gale [4], McKenzie [8] 二階堂[15], [16].

定义的,并且假定在这变域是連續、拟凹与严格单调的。当价格为  $p$  时,  $i$  的持有量  $\zeta^i$  的总价額是內积  $p\zeta^i > 0$ , 这是将全部持有量卖掉后的收入。

把这收入再投入市場,在限制条件

$$px \leq p\zeta^i, \quad x \geq 0 \quad (9.3)$$

之下,使

$$\max u_i(x) = u_i(\hat{x}^i), \quad (9.4)$$

就是說,要购入的东西,应当使效用最大。一般地,  $\hat{x}^i \neq \zeta^i$ ,  $\zeta^i - \hat{x}^i$  是純供給量(正的分量为純供給,負的分量为純需要),这样的純供給量实际上是出現于市場的。但是为了理論上考察方便,不妨把  $\hat{x}^i, \zeta^i$  看作是  $i$  的需要量与供給量。这样一来,总的需要量便是  $\sum_{i=1}^m \hat{x}^i$ , 总的供給量是  $\sum_{i=1}^m \zeta^i$ , 为了实际进行交换,平衡条件

$$\sum_{i=1}^m \hat{x}^i = \sum_{i=1}^m \zeta^i \quad (9.5)$$

必須成立。显然,对于任意的价格  $p$ , (9.5) 是不一定成立的。只是对于适当的价格  $p$ , 与对应于这个价格的适当需要量  $\hat{x}^i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), (9.3), (9.4), (9.5) 同时成立,这时各人的效用与收入相应(若追溯原来的話,即初期持有量)才能实际上达到最大值。

由于限制条件(9.3)是关于  $p$  的一次齐次式,由前所述,可把  $p$  看作被规范化了的价格体系,并且可設  $p \in S_n^0$ . 在那里,把問題重写为供求函数的形式,則对应于給定的价格  $p \in S_n^0$ , 作为  $i$  的預定計劃的需要量应当是

$$\varphi_i(p) = \{x^i | x \geq 0, \text{ 在 } px \leq p\zeta^i \text{ 之下有} \\ \max u_i(x) = u_i(x^i) \text{ 的那些 } x\}. \quad (9.6)$$

这就是  $i$  的需要函数,由于使  $u^i$  最大的  $x^i$  一般地說不是唯一的,所以  $\varphi_i(p)$  是多值函数,說得更正确些,是与  $S_n^0$  的点  $p$  相对应的  $R^n$  的非空的、紧的凸集  $\varphi_i(p)$  的点集映象 (§8)。关于各个

$i$  的需要函数的总和是总需要函数

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(p). \quad (9.7)$$

因为各个  $\varphi_i(p)$  是非空的、紧的凸集, 因此作为这些集合的矢量和的  $\varphi(p)$  也必定是非空的、紧的凸集 (§ 2, 应用例 2 及 § 7)。总供给函数

$$\psi(p) = \sum_{i=1}^m \zeta^i \quad (9.8)$$

是一个不管  $p$  取什么值都有着定值的单值函数 (点对集合映象的特例)。用这些函数来写出时,  $p \in S_n^0$  是平衡价格这件事, 是与条件

$$\psi(p) \in \varphi(p) \quad (9.9)$$

等价的。

其次, 按照假定,  $u_i$  为严格单调递增, 所以  $x^i \in \varphi_i(p)$ 。就是说, 当  $x^i$  在预算的限制下使  $u_i$  最大时, 需要量一定要将收入的全部都化费完, 即等式

$$px^i = p\zeta^i$$

成立。这是因为, 对于使不等式  $px < p\zeta^i$  成立的  $x \geq 0$ , 只要取充分小的  $\varepsilon > 0$ , 就有  $y = x + (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ ,  $py \leq p\zeta^i$ , 而因  $u_i(x) < u_i(y)$ ,  $x$  就丢失了效用的最大点了。因而, 关于各个  $i$ , 如果  $x^i \in \varphi_i(p)$ , 则  $px^i = p\zeta^i$  成立, 把这些合起来计算, 于是

$$p \sum_{i=1}^m x^i = p \sum_{i=1}^m \zeta^i,$$

故

$$px = py \quad (\text{对任意的 } x \in \varphi(p), y \in \psi(p)) \quad (9.10)$$

成立。这个收支相等的条件叫作 **Walras 法则**。为了将随着财货的供给而产生的全部收入用于财货的购入, 这是表示收入的完全循环的重要关系式。显然, 这个法则所具有的直接有关经济学的

意义是非常重要的,然而,关連到当前的問題,必須特別強調这个法則在平衡解存在問題上所具有的重要性。这就是說,假若除去一些基于連續性的严密的假定,則单纯交換模型与后面将要讲到的一般模型都具有平衡解这一事实,可以說大部分可由这个法則推出。效用最大,利潤最大等原則对平衡解存在的貢獻却不是一般所相信的那樣大。不管供求函数的背后隱藏着何等样的原理,就平衡的存在而言,只要 Walras 法則成立,本质上已經是充分的了。

上面所說的 Walras 法則的一些看法,主要是由于理論上的方便,如果在(9.10)中,用不等号来代替等号,

$$px \leq py \quad (\text{对任意的 } x \in \varphi(p), y \in \psi(p)) \quad (9.11)$$

則叫做广义的 Walras 法則。

## § 10 Arrow-Debreu 平衡模型

Arrow-Debreu 作出了一个模型,它是 Walras 式一般平衡模型的典型近代版<sup>①</sup>。它綜合了从 Walras, Pareto 到 Hicks, Samuelson 在平衡体系的数学定式化方面的研究成果,并且除去了在平衡解存在問題上所設置的一些不必要的、狹隘的、古典的假定(諸如效用指标的可微分性,可微分的古典的生产函数概念等等)。然而这不是說,这里所讲的 Arrow-Debreu 模型在經濟学上已經完美无缺了。虽然如此,纵使对于細节方面还能作出一些修正,但对于当前面临的問題(平衡解的存在)來說,是无关紧要的。

設全經濟体系是由  $l$  个消費单位  $i (i=1, 2, \dots, l)$ ,  $m$  个生产单位  $k (k=1, 2, \dots, m)$  所构成,財貨的种类号碼用  $j (j=1, 2, \dots, n)$  表示。

以下,我們列举关于生产、消費的一些假定。

1 生产 各生产单位  $k$  应当具有能滿足 § 3 中所說条件的活动的集合  $Y_k$ 。把这些条件再說一遍:

① 參看 Arrow & Debreu [2].



$$1.a. \quad Y_k \text{ 是含有 } 0 \text{ 的凸的閉集,} \quad (10.1)$$

$$1.b. \quad \text{若 } Y = \sum_{k=1}^m Y_k, \text{ 則 } Y \cap R_+^n = \{0\}, \quad (10.2)$$

$$1.c. \quad Y \cap (-Y) = \{0\}. \quad (10.3)$$

这里,  $\{0\}$  是只含有一个点  $0$  的集合。

**II 選擇領域** 各消費单位  $i$  具有財貨選擇的領域  $X_i (\subset R^n)$ ,  $X_i$  是凸的閉集, 且下面有界。最后的条件意味着, 若存在着每一組各个  $i$  的財貨組  $\xi^i$ , 則对于  $X_i$  的任意的  $x^i$ , 必有

$$x^i \geq \xi^i. \quad (10.4)$$

### III 效用指标

III.a. 各个  $i$  具有在  $X_i$  上連續的效用指标  $u_i(x)$ .

III.b. (非飽和的假定) 各个  $i$  都有这样的性质: 对于任意的  $x^i \in X_i$ , 使  $u_i(x^i) < u_i(y^i)$  成立的  $y^i \in X_i$  是存在的。

III.c. 如果  $u_i(x^i) > u_i(y^i)$ , 則对于  $z \in (x^i, y^i)$  有

$$u_i(z) > u_i(y^i).$$

**IV 利潤分配率** 对于每一組各个  $i, k$  給定一些实的常数  $\alpha_{ik} \geq 0$ , 且

$$\sum_{i=1}^l \alpha_{ik} = 1 \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (10.5)$$

$\alpha_{ik}$  的意义如下: 当生产单位  $k$  的利潤为  $\pi_k$  时, 消費单位  $i$  接受的利潤分配的限度是  $\alpha_{ik}\pi_k$ . 例如, 这相当于对股票持有者所分配的紅利。(10.5) 表示  $\pi_k$  要尽可能对全消費单位分配到。

**V 初期持有量** 設各消費单位拥有財貨組  $\zeta^i \in R^n$ .

在这里, 定义  $A-D$  模型的平衡条件。当价格  $\hat{p} \in S_n$ , 消費单位  $i$  的需要量  $\hat{x}^i \in X_i$ , 生产单位  $k$  的生产量  $\hat{y}^k \in Y_k$  的組合  $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^l, \hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^m, \hat{p}]$  滿足下列条件时, 称为是  $A-D$  模型的平衡解。

(i) **生产单位的利潤最大** 在每一組各个单位  $k$  上, 有

$$\pi_k(\hat{p}) = \max \hat{p}y = \hat{p}\hat{y}^k \quad (\text{对于任意的 } y \in Y_k). \quad (10.6)$$

(ii) 消費单位的效用最大 每組各个单位  $i$  上, 在限制条件

$$x \in X_i, \quad \hat{p}x \leq \hat{p}\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(\hat{p}) \quad (10.7)$$

之下有

$$\max u_i(x) = u_i(\hat{x}^i). \quad (10.8)$$

(iii) 供需平衡<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^l \hat{x}^i \leq \sum_{i=1}^l \zeta^i + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k. \quad (10.9)$$

并且, 对应于使 (10.9) 中不等号成立的分量的那种財貨  $j$  的价格是  $\hat{p}_j = 0$ <sup>②</sup>.

在以上基本假定 I~V 之下, 关于 Arrow-Debreu 的平衡存在有

**第1定理** 若各  $i$  的持有量  $\zeta^i$  为正, 即若  $z^i \in X_i$ , 如果存在着能使  $\zeta^i > z^i$  成立的  $z^i$ , 则平衡解是存在的。

第2定理放松了第1定理上的稍为不大现实的假定 (就是說, 正的持有量的假定), 作为其补偿的, 是加强了关于效用指标与經濟活动集合的假定。为了叙述第2定理, 必須以在 § 8 最后一部分所介紹的“需求財貨”的概念作为基础, 而首先来解釋“生产的” (productive) (即投入財貨) 財貨的概念。

設存在着为所有的消費单位同样需求的財貨, 将这些財貨的号碼的集合記为  $D$ , 若  $h$  是某个財貨的号碼, 如果对于任意的  $y \in Y$ , 有

$$(a) \quad y_h \leq 0, \quad (10.10)$$

(b)  $Y$  中存在着其他活动  $y'$  (它与  $y$  是不同的), 有

$$\textcircled{1} \quad y'_j \geq y_j \quad (\text{关于 } h \text{ 以外的任意分量 } j), \quad (10.11)$$

① 对于平衡均等条件 (9.5), 可以称为广义的供需平衡条件。

② 因此, 如果取对偶命题, 則有若  $\hat{p}_j > 0$ , 則等号成立。

$$(2) y'_h = y_h \quad (\text{关于至少一个的 } d \in D) \quad (10.12)$$

成立, 则第  $h$  种财货称为“生产的”财货。

将“生产的”财货的号码集合记为  $P$ , 则可以假定  $P \neq \phi$ .

**第2定理** 持有量  $\zeta^i$  满足下列条件。就是说, 对每一组各个  $i$  若存在着  $z^i \in X_i$ ,  $\zeta_i \geq z^i$  的  $z^i$ , 则至少对于一个  $h \in P$ , 有  $\zeta_h^i > z_h^i$ . 进一步, 存在着能使  $x^0 < y^0 + \zeta$  的  $x^0 \in X$  和  $y^0 \in Y$  ①. 在这里,  $X = \sum_{i=1}^I X_i$ ,  $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$ ,  $\zeta = \sum_{i=1}^I \zeta^i$ . 此外, 上述的号码  $h$  在每一组各个  $i$  处是不同的。在以上这些假定之下, 存在着平衡解。

**注意** 在第2定理中当然假定着  $D \neq \phi$ , 因此, III. b 这一条(非饱和的假定)自动地成立。

## § 11 供求函数的构成

Arrow-Debreu 为了证明上述二个定理, 构成了博弈形式的抽象经济模型, 而将平衡解的存在问题归结到这个上面去。虽然如此, 本书所采取的方针, 却是把它归结到以 Walras 法则为基础而定式化的 Gale-Nikadô 定理上去。为此, 作为准备步骤, 首先研究关于在  $A-D$  模型上 Walras 法则的成立与否。因此, 有必要对比单纯交换模型的情况讨论得更细致一些, 并且, 这种考察, 在平衡解存在证明的第一阶段也是必要的手续。在 § 9 中, 对于正的价格  $p$ , 亦即对于基本单纯形  $S_n$  的开核  $S_n^0$  上定义的需要函数 (9.6), 是可以构成直接的经济意义的。与之相反, 在 § 10 里所讲的模型的情况下, 用具有这样意义的直接的方法来构成供求函数是困难的。  $A-D$  模型与单纯交换模型不同, 由于平衡价格不一定是正的价格, 因而不只是对  $S_n^0$ , 而有必要对  $S_n$  全域上来定义供求函数。然而, 对于任意的  $p \in S_n$ , 效用最大值问题的变域的紧性不一定有保证, 因此我们面临着  $\max u(x)$  不一定有意义的困难。一方面, 在构成供给函数时, 尽可能施行 (10.6), 由于  $Y_k$  一般不是紧的, 故对于  $p \in S_n^0$ ,  $\max py$  恐怕要成为无意义。但是, 实际上, 即使在单纯交换模型的情况, 由于

① 后半条件意味着如果忽视了价格状况、预算制约式、效用最大、利润最大等条件, 由生产与持有财货的供给, 把所产生正的超过供给部分的财货分配到全部消费单位去是可能的。

直接地构成的供求函数(9.6)在数学上处理起来极为不便,故也要抛弃过分执着于这种经济学的解释,而要采用更容易处理的方法。此外,就对作为本来目的的平衡解存在问题可能有用的形式再构造供求函数这一点也是首要的。以下,将首先对单纯交换模型再定义其供求函数,以此为根据再对 A-D 模型构成供求函数,然后证明 Walras 法则成立。

**单纯交换模型的情况** 在这种情况下,容易再构成需要函数。对总供给量  $\zeta$ , 选取一个使  $\alpha > \zeta$  的财货组  $\alpha$ , 并且予以固定,如果作  $R^*$  的超立方体(cube)

$$E = \{x \mid 0 \leq x \leq \alpha\}, \quad (11.1)$$

则  $E$  是含于  $R_+^n$  上的凸体,  $\zeta$  为其内点。

在(9.6)  $\varphi_i$  的定义中,若将限制条件中的  $x \geq 0$  换以比之更强的条件  $x \in E$ , 在这新的限制条件下,使  $u_i(x)$  最大的  $x^i$  的全体作为个别需要函数的值来定义,再把这个作为  $\varphi_i$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi_i(p) = \{x^i \mid x \in E, px \leq p\zeta^i \text{ 之下} \\ \max u_i(x) = u_i(x^i)\}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

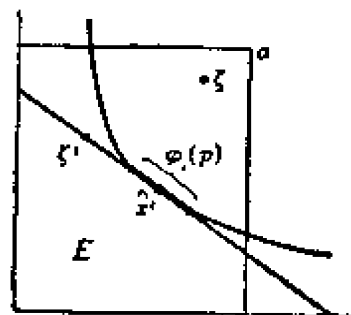


图 11.1

在这个时候,由于变域  $\{x \mid x \in E, px \leq p\zeta^i\}$  对任意的  $p \in S_n$  是紧的凸集,所以连续函数  $u_i(x)$  必定在其上达到最大值。故而  $\varphi_i(p)$  定义于  $S_n$  全域上,而且,与以前情况一样,  $\varphi_i(p)$  成为非空的、紧的凸集,因而总需要函数  $\varphi(p) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(p)$  也是非空的、紧的凸集。此外,容易知道这个新的  $\varphi(p)$  仍然满足 Walras 法则。

**Arrow-Debreu 模型的情况** 在这个情况下,构造超立方体  $E$  的方法要稍为巧妙一些,其作法如下<sup>①</sup>:

如前所述,首先令  $X = \sum_{i=1}^I X_i$ ,  $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$ , 假如平衡解

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^I, \hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^m, \hat{p}]$$

① 根据 Arrow-Debreu [2].

存在, 則由于条件(iii)的成立, 必須滿足条件

$$(\zeta + Y - X) \cap R_+^n \ni \zeta + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k - \sum_{i=1}^l \hat{x}^i,$$

因此, 如果对每一組各个  $i, k$  作集合

$$\tilde{X}_i = \{x^i \mid x^i \in X_i, (\zeta + Y - \sum_{i \neq i} X_i - x^i) \cap R_+^n \neq \emptyset\}, \quad (11.3)$$

$$\tilde{Y}_k = \{y^k \mid y^k \in Y_k, (\zeta + y^k + \sum_{i \neq k} Y_i - X) \cap R_+^n \neq \emptyset\}, \quad (11.4)$$

則由关于持有量的假定, 以及  $0 \in Y_k$ , 故知  $\tilde{X}_i \neq \emptyset, \tilde{Y}_k \neq \emptyset$ , 特別, 有

$$\hat{x}^i \in \tilde{X}_i, \quad \hat{y}^k \in \tilde{Y}_k.$$

$\tilde{X}_i, \tilde{Y}_k$  同时为閉的凸集这一点, 从定义式(11.3), (11.4) 是容易明白的, 現在进一步証明它們是有界集。

①  $\tilde{Y}_k$  有界性的証明: 設  $\tilde{Y}_k$  不是有界的, 則必存在点列  $\{y^{k\nu}\}, y^{k\nu} \in Y_k, \|y^{k\nu}\| \rightarrow +\infty (\nu \rightarrow \infty)$ . 由定义(11.4), 存在着点  $y^{i\nu} \in Y_i, x^{i\nu} \in X_i (\nu = 1, 2, \dots)$ , 使

$$\zeta + y^{k\nu} + \sum_{i \neq k} y^{i\nu} - \sum_{i=1}^l x^{i\nu} \geq 0.$$

若利用(10.4)的下界  $\xi^i$ , 并設  $\xi = \sum_{i=1}^l \xi^i$ , 則

$$\zeta + \sum_{i=1}^m y^{i\nu} \geq \sum_{i=1}^l x^{i\nu} \geq \xi,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m y^{i\nu} \geq \xi - \zeta. \quad (11.5)$$

若設

$$\mu_\nu = \max_{1 \leq i \leq m} \|y^{i\nu}\|, \quad (11.6)$$

則因  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu = +\infty$ , 故对充分大的  $\nu, \mu_\nu \geq 1$  成立。考虑到  $Y_i$  是凸的,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\nu} y^{t\nu} &= \left( \frac{1}{\mu_\nu} \right) y^{t\nu} + \left( 1 - \frac{1}{\mu_\nu} \right) \cdot 0 \in Y_i, \\ (t &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (11.7)$$

在(11.5)的两边用  $\mu_\nu$  去除,使  $\nu \rightarrow \infty$ , 则  $\mu_\nu \rightarrow +\infty$ , 故

$$\sum_{i=1}^m (y^{i\nu}/\mu_\nu) \geq (\xi - \zeta)/\mu_\nu \rightarrow 0. \quad (11.8)$$

此外,根据  $\mu_\nu$  的定义(11.6),对于充分大的  $\nu$ ,

$$\|y^{i\nu}/\mu_\nu\| \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (11.9)$$

就是說,由于  $\frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} \in \bar{U}(0, 1)$ , 例如,由  $\bar{U}(0, 1)$  的紧性,所以在每一組各个  $i$  上不妨假定

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} = y^{i0}. \quad (11.10)$$

因为各个  $Y_i$  为閉集,故  $y^{i0} \in Y_i$  一事自不待言。此外,由(11.8),有  $\sum_{i=1}^m y^{i0} \geq 0$ . 故而,因为

$$\sum_{i=1}^m y^{i0} \in Y \cap R_+,$$

由假定 I. b, 得

$$\sum_{i=1}^m y^{i0} = 0. \quad (11.11)$$

把  $i$  任意地固定,

$$y^{i0} = \overbrace{0 + \dots + 0}^{m-1} + y^{i0} \in Y, \quad (11.12)$$

同时,由(11.11)有

$$-y^{i0} = 0 + \sum_{s \neq i} y^{s0} \in Y. \quad (11.13)$$

根据(11.12), (11.13), 得  $y^{i0} \in Y \cap (-Y)$ . 因而,由假定 I. c 可知,  $y^{i0} = 0$ . 由于这是对任意的  $i$  都成立的,故关于各个  $i$  有

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} = y^{i0} = 0,$$

就是說,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\| \frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} \right\| = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

故而应当有

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} \right| \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

但是, 根据  $\mu_\nu$  的定义 (11.6), 必须有

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{y^{i\nu}}{\mu_\nu} \right| = 1,$$

这就引出了矛盾。定理证明完毕。

②  $\tilde{X}_i$  有界性的证明: 利用①的结果来证明。若  $x^i \in \tilde{X}_i$ , 则存在着  $y^k \in Y_k$ , 使

$$\zeta + \sum_{k=1}^m y^k - \sum_{i=1}^l x^i \geq 0. \quad (11.14)$$

由于  $y^k$  对 (11.14) 成立, 显然  $y^k \in \tilde{Y}_k$ . 故而利用  $\tilde{Y}_k$  的有界性, 就有

$$\xi^i \leq x^i \leq \zeta + \sum_{k=1}^m y^k - \sum_{i \neq i} x^i \leq \zeta + \sum_{k=1}^m y^k - \sum_{i \neq i} \xi^i,$$

故  $x^i$  上下都是有界的。

由以上所述,  $\tilde{X}_i, \tilde{Y}_k$  是非空的、紧的凸集, 假定存在着平衡需要量  $\hat{x}^i$ , 平衡生产量  $\hat{y}^k$ , 则易知  $\hat{x}^i \in \tilde{X}_i, \hat{y}^k \in \tilde{Y}_k$ . 同时, 根据定义, 显然有

$$\tilde{X}_i \subset X_i, \quad \tilde{Y}_k \subset Y_k.$$

**供求函数的构成** 选定一个在其开核中包含全部  $\tilde{X}_i, \tilde{Y}_k$  ( $i=1, 2, \dots, l; k=1, 2, \dots, m$ ) 的充分大的超立方体, 记为  $E$ . 用到这个  $E$  时, 显然  $X_i \cap E, Y_k \cap E$  分别是非空的、紧的凸集。

有了以上的准备之后, 可以用下面的方法来构造供求函数。

首先, 生产单位的供给函数  $\psi_k(p)$  与利润函数  $\pi_k(p)$ , 对于每一组各个  $k$ , 是由  $S_n$  上的下列式子:

$$\psi_k(p) = \{y^k | y \in Y_k \cap E \text{ 之下有 } \max py = py^k\}, \quad (11.15)$$

$$\pi_k(p) = \max py \text{ (在限制条件 } y \in Y_k \cap E \text{ 之下)} \quad (11.16)$$

来定义的。容易証明, (11.16) 是单值連續函数。

其次, 同样地, 消費单位的需要函数  $\varphi_i(p)$ , 对每一組各个  $i$ , 是由  $S_n$  上的

$$\varphi_i(p) = \left\{ x^i : x \in X_i \cap E, \text{ 在 } px \leq p\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\pi_k(p) \text{ 之下有} \right. \\ \left. \max u_i(x) = u_i(x^i) \right\} \quad (11.17)$$

来定义的。故而, 总的供求函数是

$$\psi(p) = \zeta + \sum_{k=1}^m \psi_k(p), \quad (11.18)$$

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(p). \quad (11.19)$$

以上这些函数是对一切的  $p \in S_n$  来定义的, 它的象都是非空的、紧的凸集。此外,  $\varphi_i(p), \psi_k(p) \subset E$  自不待言。

**Walras 法則** 設  $x^i \in \varphi_i(p), y^k \in \psi_k(p)$ , 則由預算制約式可得

$$px^i \leq p\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\pi_k(p),$$

对  $i$  求和, 于是有

$$\begin{aligned} p \sum_{i=1}^l x^i &\leq p \sum_{i=1}^l \zeta^i + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\pi_k(p) \\ &= p\zeta + \sum_{k=1}^m \pi_k(p) \sum_{i=1}^l \alpha_{ik} \\ &= p\zeta + \sum_{k=1}^m \pi_k(p) = p\zeta + p \sum_{k=1}^m y^k. \end{aligned}$$

因而, 对于  $x \in \varphi(p), y \in \psi(p)$ , 有  $px \leq py$ , 即广义 Walras 法則成立。

## § 12 原型的平衡与供求函数的平衡, 其等价性

在前节中, 由于规定了适当的超立方体  $E$ , 因而能够构成供求函数。然而, 这些函数不一定与原来模型的经济学的意义相适应。例如在 (11.15) 中,



点  $y^k \in \psi_k(p)$  虽然在变域  $Y_k \cap E$  中是利润最大点,但在变域  $E_k$  中却不一定是利润最大点。虽然这一点初看起来是不合适的,然而在平衡点上,这个不合适的情况可以巧妙地回避过去。将原型中的效用,利润最大值问题的变域限定在超立方体  $E$  之内,所得的是 §11 的供求函数。因此,显然原型的平衡解就是供求函数的平衡解。本节将证明反面的事情也成立,就是说,供求函数的平衡解实际上就是原型的平衡解。

**单纯交换模型的情况** 如对于把 (11.2) 的  $\varphi_i(p)$  累加而得的总需要函数  $\varphi(p)$ , 有平衡价格  $\hat{p} \in S_n$  存在, 设  $\varphi(\hat{p}) \ni \zeta$ , 则  $\zeta = \sum_{i=1}^m \hat{x}^i$ ,  $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$  与由分解而得的  $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^m, \hat{p}]$  是原型的平衡解。为此, 只须证明  $\hat{p} > 0$  与在限制条件  $x \geq 0$ ,  $\hat{p}x \leq \hat{p}\zeta$  下  $\hat{x}^i$  使  $u_i(x)$  为最大。

设有某种财货  $j$  的价格是  $\hat{p}_j = 0$ , 则由  $u_i$  的严格单调增加性, 以及  $\varphi_i$  的定义 (11.2), 必须有  $\hat{x}_j^i = a_j$ , 而这是与  $\hat{x}^i \leq \sum_{i=1}^1 \hat{x}^i = \zeta < a$  相矛盾的, 因而  $\hat{p} > 0$ 。此外, 假使有满足  $w \geq 0$ ,  $\hat{p}w \leq \hat{p}\zeta$  并且  $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$  的  $w$  存在, 那末, 显然必须  $w \notin E$ 。其次, 由于  $0 \leq \hat{x}^i < a$ , 所以线段  $[\hat{x}^i, w]$  与  $E$  的公共部分必须含有  $\hat{x}^i$  以外的点  $y$ 。一方面, 由于  $u_i(x)$  是连续的,  $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$ , 所以适当地选取  $z \in (0, w)$ , 能够使

$$u_i(z) \geq u_i(\hat{x}^i),$$

其次, 由于二个线段  $[z, \hat{x}^i]$ ,  $(y, 0]$  必定相交, 设其公共点为  $b$ , 则根据决定  $z$  的方法,  $b \in [z, \hat{x}^i]$  以及  $u_i$  的拟凹性, 有

$$u_i(b) \geq u_i(\hat{x}^i).$$

此外, 由于  $b \in (y, 0]$ , 故  $y \geq b$ 。因而, 利用  $u_i$  的严格单调递增性, 得到

$$u_i(y) > u_i(b) \geq u_i(\hat{x}^i).$$

然而, 因为  $y \in E$ ,  $\hat{p}y \leq \hat{p}\zeta$ , 而这是与  $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$  相矛盾的。如此, 证明了  $u_i(\hat{x}^i)$  是在  $\hat{p}x \leq \hat{p}\zeta$  下不只是  $E$ , 而且是在  $R_n^+$  的全部区

域上的最大值。

**A-D 模型的情况** 现在来证明, 上述事实在这种情况下也成立。就是说, 对于  $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$ ,  $\hat{y}^k \in \psi_k(\hat{p})$ , 若平衡条件 (iii)

$$\zeta + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k \geq \sum_{i=1}^l \hat{x}^i$$

成立, 则可以证明

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^l, \hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^m, \hat{p}]$$

是原型的平衡解。证明的要点本质上与上例是相同的。以下, 把平衡条件就不同条件分别加以证明。

**(i) 的证明** 假如有使  $\hat{p}y > \hat{p}\hat{y}^k$  的点  $y \in Y_k$ , 则对于任意的  $z \in [y, \hat{y}^k)$ , 有  $\hat{p}z > \hat{p}\hat{y}^k$ 。但是, 由于  $\hat{y}^k \in \tilde{Y}_k$ , 所以  $\hat{y}^k$  是  $E$  的内点。因而, 凡是  $[y, \hat{y}^k)$  的点  $z$  而且充分接近  $\hat{y}^k$  的都处于  $Y_k \cap E$ 。但这是与  $\hat{y}^k$  是利润最大点这一事实相矛盾的。因而,  $\hat{y}^k$  是在全部变域  $Y_k$  上的  $\hat{p}y$  的最大点<sup>①</sup>。

**(ii) 的证明** 假定存在着能使  $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$ ,  $\hat{p}w \leq \hat{p}\zeta^i + \sum \alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$  的点  $w \in X_i$ , 则由假定 III. c, 对于线段  $[w, \hat{x}^i)$  上的点  $y$ , 有

$$u_i(y) > u_i(\hat{x}^i).$$

但是, 因为  $\hat{x}^i \in \tilde{X}_i$ , 所以  $\hat{x}^i$  是  $E$  的内点。因而, 如果把前述的  $y$  取成充分地接近  $\hat{x}^i$ , 则  $y$  含于  $X_i \cap E$ , 同时, 由于

$$\hat{p}y \leq \hat{p}\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$$

的成立也是显然的, 所以这是与  $\hat{x}^i$  为效用最大点相矛盾。因而,  $\hat{x}^i$  是预算制约下, 在全变域  $X_i$  的效用最大点。

**(iii) 的后半部分的证明** 对于  $\hat{x}^i$ , 等式

$$\hat{p}\hat{x}^i = \hat{p}\zeta^i + \sum \alpha_{ik}\pi_k(\hat{p})$$

① 因此, 须注意  $\hat{y} = \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$  是在  $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$  上成为  $\hat{p}y$  的最大点。

成立。假若，設严格不等号作为成立了，則若取根据非饱和假定而存在着的使  $u_i(x) > u_i(\hat{x}^i)$  成立的  $x \in X_i$  时，則对于任意的  $y \in [x, \hat{x}^i)$ ，有  $u_i(y) > u_i(\hat{x}^i)$ ，同时，若  $y$  与  $\hat{x}^i$  充分接近，則也滿足預算制約式，但这是与  $\hat{x}^i$  为效用最大点相矛盾的。因而，預算制約式中等号应当成立，将这些对  $i$  求和，則有

$$\hat{p} \sum_{i=1}^l \hat{x}^i = \hat{p} \zeta + \hat{p} \sum_{k=1}^m \hat{y}^k. \quad (12.1)$$

因而，根据 (iii) 的前半部分与 (12.1)，(iii) 的后半部分是容易得到的。

以上就两个例子討論了一般平衡模型与对应于它的供求函数的构成，証明了这些是能滿足 Walras 法則的，又論述了模型的平衡与供求函数的关系。其結果是，問題被变换为供求函数的平衡問題了。因而，为了了解平衡解的实际存在与否，必須詳細地了解价格与这些函数值（集合）及其对应状况，特别是从拓扑的观点来加以研究。以下的 § 13~§ 15 就是为了这样而作的准备。

### § 13 Brouwer 不动点定理

作为凸集的主要性质，以及为了証明平衡存在定理的准备，必須叙述并証明不动点存在定理（即 Brouwer 定理），然后将这个定理推广到多值映象的情况（角谷定理）。

**Brouwer 不动点定理** 設  $X$  为  $R^n$  的紧的凸集， $f(x)$  为把  $X$  的点  $x$  对应到  $X$  的点  $f(x)$  的連續映象，則存在着不动点

$$\hat{x} = f(\hat{x}).$$

由已經叙述过的 § 4, § 6,  $X$  是与  $m$  (对适当的  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ )) 維单纯形  $S$  同胚的。設  $S$  与  $X$  之間的一一且双方連續的映象为  $g$ ，則連續映象

$$h(p) = g^{-1}[f\{g(p)\}]$$

是把  $S$  的点  $p$  映照为  $S$  的点  $h(p)$  的映象。如果  $h(p)$  有不动点  $\hat{p}$ ，則  $\hat{x} = g(\hat{p})$  是  $f$  的不动点。因此，只要就  $X$  为单纯形的情况

来証明就行了。

为了証明定理,首先就单纯形作一些考察,虽然以下所述的补充命题对任意的单纯形分划都成立,但这里只限于討論重心分划的情形。

**Sperner 补充命题** 設对于单纯形  $S = \overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$  已施行了几次重心分划。利用服从下述規則的方法,这个单纯形分划的各个頂点  $y$ , 可以对应于  $S$  的頂点  $x^0, x^1, \cdots, x^n$  中的一个  $\sigma(y)$ 。就是說,  $\sigma(y)$  对应于包含  $y$  的最小維数的 (未作分划的, 原来  $S$  的) 边单纯形的頂点。这时, 对于由  $S$  的分划而得的  $n$  維小单纯形  $S' = \overline{y^0 y^1 \cdots y^n}$  (一般地,  $\sigma(y^0), \sigma(y^1), \cdots, \sigma(y^n)$  里面有着一致的东西, 但特別也有  $\sigma(y^i) \neq \sigma(y^j)$  ( $i \neq j$ ) 的那种  $S'$ ) 来說, 至少存在着一个这样的  $S'$ , 更正确些說, 存在着奇数个。

**証明** 用归納法来証。当  $n=0$  时是显然的。在  $n=1$  的情况,  $S = \overline{x^0 x^1}$  是綫段  $[x^0, x^1]$ , 分划是在这个綫段上設置的分点。根据頂点对应  $y \rightarrow \sigma(y)$  的規則, 有  $\sigma(x^0) = x^0, \sigma(x^1) = x^1$ 。这里, 含有  $x^0, x^1$  的  $S$  的最低維数的边单纯形分別是  $x^0, x^1$  本身。因为包含着由分划而設立的新的其他頂点  $y$  的  $S$  的最低維数的边单纯形是  $S$  自身, 所以  $\sigma(y)$  是  $x^0$  或  $x^1$ 。如图 13.1, 从左向右移动时, 去研究  $\sigma(y)$ , 只要  $\sigma(y) = x^0$  的操作繼續进行, 既然  $f(x^1) = x^1$ , 就会在一个地方遇到初次是  $\sigma(y) = x^1$  的頂点。設这个頂点为  $b$ , 与其很靠近的左方的頂点为  $a$ , 則小单纯形  $\overline{ab}$  就是要求的。結果, 据

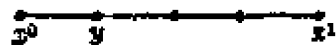


图 13.1

上所述, 这种小单纯形的个数, 当自左向右移动时,  $\sigma(y)$  的值从  $x^0$  到  $x^1$ , 或从  $x^1$  到  $x^0$  的变化次数是相等的。这很明显是奇数。

假定維数低于  $n$  的情况下定理結論是正确的, 現在来証明維数为  $n$  的情况。由  $S = \overline{x^0 x^1 \cdots x^n}$  的分划而产生的  $n$  維小单纯形  $S' = \overline{y^0 y^1 \cdots y^n}$  的頂点, 由对应  $y \rightarrow \sigma(y)$ , 对应于  $x^0, x^1, \cdots, x^n$  的全

部时, 则  $S'$  叫做正则小单纯形, 由同样的分划所产生的  $(n-1)$  维小单纯形  $T' = \overline{x^0 x^1 \cdots x^{n-1}}$  的顶点对应着顶点  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  的全部时, 则  $T'$  叫做正则的小边单纯形。这里, 设  $\lambda$  为正则小单纯形的个数,  $\mu$  为在  $S$  的境界上所有的正则的小边单纯形的个数,  $\mu(S')$  为小单纯形  $S'$  的正则的小边单纯形的个数, 则可以证明  $\lambda$  是奇数<sup>①</sup>。

首先来看看  $\mu(S')$  的值。若  $S'$  是正则的, 则  $S'$  的只有一个边单纯形的顶点映成  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$ 。这是因为其他的边单纯形的顶点必包含着对应于  $x^n$  的顶点之故。因而, 在这种情况下,  $\mu(S') = 1$ 。若  $S'$  不是正则的, 则在  $n+1$  个顶点  $x^0, x^1, \dots, x^n$  之中, 必定有着不是  $S'$  的顶点的象。而假使  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  中有不是  $S'$  的顶点的象, 则显然  $\mu(S') = 0$ 。在其他的情况下, 则只要把  $S'$  的顶点安上适当的号码, 则因  $S' = \overline{y^0 y^1 \cdots y^n}$ ,  $\sigma(y^i) = x^i (i=0, 1, \dots, n-1)$ ,  $\sigma(y^n) = x^j$  (对于某种  $0 \leq j \leq n-1$  的  $j$ ), 故正则的小边单纯形是  $\overline{y^0 y^1 \cdots y^{n-1}}$  与把这个单纯形的顶点  $y^j$  易以  $y^n$  后的一个小边单纯形合计二个。故而, 这种情况下,  $\mu(S') = 2$ 。因此,

$$\lambda \equiv \sum \mu(S') \pmod{2} \quad (\text{关于一切小单纯形 } S' \text{ 的和}). \quad (13.1)$$

(13.1) 从一方面看来, 虽然是正则的小边单纯形的个数之和, 却是有着若干重复的。一个正则的小边单纯形, 如果它是附着于  $S$  的境界上的, 则正好是一个小单纯形的边单纯形, 如果它不是完全在境界上的, 则恰巧是两个小单纯形的边单纯形。因而

$$\mu \equiv \sum \mu(S') \pmod{2}, \quad (13.2)$$

于是  $\lambda \equiv \mu \pmod{2}$  成立。

其次, 设  $T'$  是在  $S$  的境界上的正则小边单纯形, 则  $S$  的边单纯形  $T$  必须是  $\overline{x^0 x^1 \cdots x^{n-1}}$ 。这是根据顶点对应规则  $y \rightarrow \sigma(y)$  显而易见的。就是说, 若其他边单纯形有  $T'$ , 则  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  之中

① 关于证明的格式, 依照 Whyburn [21] 第 243 页。

至少有一个不是  $T'$  的顶点的象。其次,在这里,若把对应  $y \rightarrow \sigma(y)$  限定在  $(n-1)$  维单纯形  $T = \overline{x^0 x^1 \cdots x^{n-1}}$  上来考察,当然满足前述规则,故由归纳法的假设,  $\mu$  是奇数。因此,  $\lambda$  也是奇数。

**不动点定理的证明** 只要把  $S$  在基本单纯形

$$S_{n+1} = \left\{ p \mid p \geq 0, \sum_{i=0}^n p_i = 1 \right\}$$

的情况下加以证明就好了。设  $f$  是将  $S_{n+1}$  的点  $p$  映照成  $S_{n+1}$  的点

$$f(p) = (f_0(p), f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n f_i(p) = 1$$

的连续映象。作如下的  $(n+1)$  个闭集:

$$F_i = \{p \mid p \in S_{n+1}, p_i \geq f_i(p)\}. \quad (13.3)$$

这是因为形成闭集的  $f_i$  是连续函数的缘故。这个闭集合族  $\{F_i\}$  具有以下性质。首先,  $S_{n+1}$  的  $(n+1)$  个顶点是

$$e^i = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{i+1}, 1, 0, \cdots, 0).$$

设  $S_{n+1}$  的任意的边单纯形为  $T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} \cdots e^{i_k}}$ , 则

$$T \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_k}.$$

这里,关于  $T$  的点  $p$ , 因为  $p_{i_0} + p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} = 1$ , 假如, 设  $p \notin F_{i_t}$  ( $t=0, 1, \cdots, k$ ), 则关于一切  $t$ , 有  $p_{i_t} < f_{i_t}(p)$ , 将其合计起来, 可得  $1 < \sum_{i=0}^k f_{i_t}(p) \leq \sum_{i=0}^n f_i(p)$ , 这是矛盾的。因此,

$$T \subset \bigcup_{i=0}^k F_{i_t}$$

成立。特别,  $S_{n+1}$  的各顶点  $e^i \in F_i$ 。

其次,将  $S_{n+1}$  作任意次的重心分划,用小单纯形的网来遮盖。设包含小单纯形的顶点  $y$  的最低次维数的边单纯形为

$$T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} \cdots e^{i_k}},$$

則由前述的結果, 由于  $F_{i_0}, F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$  之中必定有包含  $y$  的, 选取一个这样的  $F_{i_k}$ , 作  $\sigma(y) = e^{i_k}$ . 这个頂点对应  $y \rightarrow \sigma(y)$ , 从其作出的方法, 显然是能满足 Sperner 补充命题的条件的, 所以至少存在一个正則的小单纯形  $S'$ . 若将  $S'$  的頂点放上适当的号码, 則易知  $S' = \overline{y^0 y^1 \dots y^n}$ ,  $y^i \in F_i (i=0, 1, \dots, n)$ . 現在, 設重心分划的次数为  $\nu$ , 則由 §6 的結果, 有

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i, j \leq n} \rho(y^i, y^j) &= d(S') \\ &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^\nu \cdot d(S_{n+1}) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (13.4)$$

这里, 关于每一組各个  $\nu (\nu=1, 2, 3, \dots)$ , 若选择正則的小单纯形  $\overline{y^{0\nu} y^{1\nu} \dots y^{n\nu}}$ ,  $y^{i\nu} \in F_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 則因  $S_{n+1}$  是紧的, 所以  $n+1$  个点列  $\{y^{i\nu}\} (i=0, 1, \dots, n)$  的适当的部分序列  $\{y^{i\nu'}\} (\nu'$  为各点列上公共部分的自然数列) 分別收敛于  $p^i$ . 按这样做时, 由于  $F_i$  为閉集, 当然,  $p^i \in F_i$ , 由 (13.4), 实际上,  $p^i$  的全部必須是同一个点  $\hat{p}$ . 因而  $\hat{p}$  是含于一切  $F_i (i=0, 1, \dots, n)$  的点。因此, 有

$$\hat{p}_i \geq f_i(\hat{p}) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

由此式以及

$$\sum_{i=0}^n \hat{p}_i = \sum_{i=0}^n f_i(\hat{p}) = 1,$$

所以  $\hat{p}_i = f_i(\hat{p})$  关于一切  $i$  成立。这就是說, 使  $\hat{p} = f(\hat{p})$  成立的  $\hat{p}$  是不动点。以上, 結束了不动点定理的証明。上述証明是作为 Brouwer 定理的証明的最初等方法, 它就是著名的 **Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz** 的証明。

Brouwer 不动点定理是非常重要的与有用的定理, 它或者从它进一步推广而得的形式在許多問題上应用甚广。众所周知的重要例子是在微分方程存在定理上的应用<sup>①</sup>。此外, 不动点定理也是在将博奕論基本定理一般化时不

① 关于这个問題, 可参照福原, 佐藤, 古屋: 常微分方程 I (本讲座) 第 3 章 (即本丛书中張庆芳等譯《常微分方程》——譯者注)。

可缺少的武器<sup>①</sup>。

## § 14 角谷不动点定理

Brouwer 定理可以推广到多值映象(即点对集合的映象),给出在应用上非常便利的形式。这就是本节要讲的角度定理<sup>②</sup>,其原始形式是由 von Neumann 发现的<sup>③</sup>。

**闭映象** 首先,从关于点对集合映象的连续概念的说明开始。设  $X, Y$  (同一个或相异的)为 Euclid 空间内的二个集合,且  $Y$  是紧的。当然,  $X, Y \neq \phi$ 。并假设有把  $X$  的点  $x$  对应到  $Y$  的非空子集  $f(x)$  的点对集合映象  $f: X \rightarrow Y$ 。现在把  $X$  与  $Y$  的直积空间  $X \times Y$  中的子集

$$G_f = \{(x, y) \mid y \in f(x), \\ x \in X, y \in Y\}$$

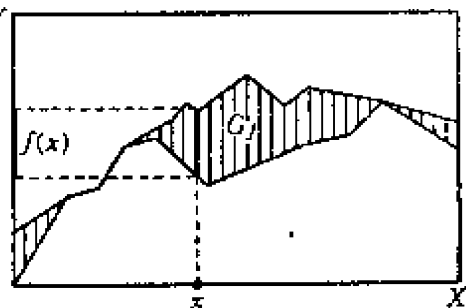


图 14.1

叫做映象  $f$  的图象。这是通常单值映象的图象概念的自然推广。若  $G_f$  成为  $X \times Y$  的闭集,换言之,如果  $\lim_{y \rightarrow \infty} x^y = x, \lim_{y \rightarrow \infty} y^y = y, y^y \in f(x^y)$ , 而必有  $y \in f(x)$ , 则把映象  $f: X \rightarrow Y$  叫做闭映象。

映象  $f$  是闭的这件事,是与集合  $X, Y$  有关系的相对的性质。因而,在正确叙述的情况下,虽然要象上面那样地说“点对集合映象  $f(x): X \rightarrow Y$  是闭的”,但如果定义域等很明显时,这些话也可以省略。

若  $f$  是闭的,则各点的象  $f(x)$  是紧的。在该处,由于  $Y$  是紧的,所以只要证明  $f(x)$  是置于  $Y$  上的闭集就好了<sup>④</sup>。设  $y^y \in f(x)$ ,

<sup>①</sup> 例如,见 H. Nikaidô: On von Neumann's minimax theorem, Pacific J. Math., 4, No. 1; 及 H. Nikaidô and K. Isoda: Note on noncooperative convex games, Pacific J. Math., 5, Supplement 1.

<sup>②</sup> 见角谷[5].

<sup>③</sup> 见 von Neumann [10].

<sup>④</sup> 见入江[23]第 93 页定理 6.



$\lim_{\nu \rightarrow \infty} y^\nu = y \in Y$ . 若取  $X$  的点列  $x^\nu = x (\nu = 1, 2, \dots)$ , 则当然有

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x.$$

因而, 由闭映象的定义, 有  $y \in f(x)$ ,  $f(x)$  是闭集。

对于  $a \in X$  的象  $f(a)$  的任意  $\varepsilon$  邻域  $U(f(a), \varepsilon)$ , 当定出  $a$  的适当的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$ , 若  $x \in U(a, \delta)$  时有  $f(x) \subset U(f(a), \varepsilon)$ , 则称映象  $f$  为在  $x=a$  处是上半连续的。在上述的假设之下, 若  $f: X \rightarrow Y$  是闭映象, 则在各点  $a \in X$  处是上半连续的。为了证明这个, 现在, 设在上半连续性的定义中所提到的  $a$  的  $\delta$  邻域不存在, 则在  $a$  的  $\frac{1}{\nu}$  邻域  $U(a, \frac{1}{\nu}) (\nu = 1, 2, 3, \dots)$  之中, 存在着  $x^\nu$ , 使  $f(x^\nu) \not\subset U(f(a), \varepsilon)$ . 在这里, 可以选定满足  $y^\nu \in f(x^\nu)$ ,  $y^\nu \notin U(f(a), \varepsilon)$  的点  $y^\nu \in Y$ . 由于  $Y$  是紧的, 所以存在着点列  $\{y^\nu\}$  的聚点。设其中之一为  $b$ , 则  $(a, b)$  成为点列  $\{(x^\nu, y^\nu)\}$  的聚点。但是, 由于  $(x^\nu, y^\nu) \in G_f (\nu = 1, 2, \dots)$ ,  $G_f$  是在  $X \times Y$  上闭的, 所以  $(a, b) \in G_f$ , 就是说, 必须  $b \in f(a)$ . 可是, 由于  $y^\nu \notin U(f(a), \varepsilon)$ , 所以其聚点  $b \notin U(f(a), \varepsilon)$  ①, 就是说,  $b \notin f(a)$ , 而这是矛盾的。

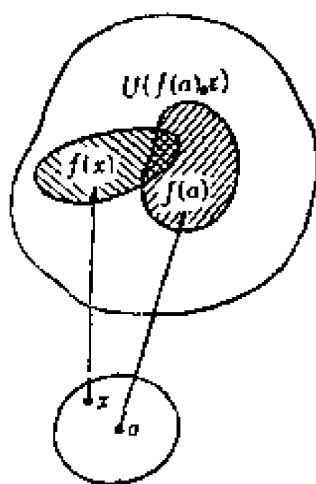


图 14.2

点。但是, 由于  $(x^\nu, y^\nu) \in G_f (\nu = 1, 2, \dots)$ ,  $G_f$  是在  $X \times Y$  上闭的, 所以  $(a, b) \in G_f$ , 就是说, 必须  $b \in f(a)$ . 可是, 由于  $y^\nu \notin U(f(a), \varepsilon)$ , 所以其聚点  $b \notin U(f(a), \varepsilon)$  ①, 就是说,  $b \notin f(a)$ , 而这是矛盾的。

**角谷不动点定理** 设  $X$  为  $R^n$  的紧的凸集,  $f: X \rightarrow X$  是把  $X$  的点  $x$  对应到  $X$  的非空的凸子集  $f(x)$  的闭映象, 则存在着不动点  $\hat{x} \in f(\hat{x})$ .

**证明** ② 由于  $X$  是紧的, 故对于任意的  $\delta > 0$ , 存在着  $\delta$  网。

所谓  $\delta$  网, 是说: 存在着  $X$  的有限个点  $a^i (i = 1, 2, \dots, s)$ , 使在任意点  $x \in X$  的  $\delta$  邻域, 至少存在着一个  $a^i$ . 这是与用有限个  $\delta$  邻域  $U(a^i, \delta) (i = 1, 2, \dots, s)$  来复盖  $X$  的全部这件事相当的。取  $X$  的点  $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$ , 如

① 因为  $U(f(a), \varepsilon)$  是开集, 因而  $\{y | y \in Y, y \notin U(f(a), \varepsilon)\}$  是  $Y$  的闭集。

② 由二阶段[12].

果关于各个点  $a$  取这种邻域, 则显然  $X \subset \bigcup_{a \in X} U(a, \delta)$ , 由于各  $U(a, \delta)$  是开集,  $X$  是紧的, 故由 Heine-Borel 复盖定理<sup>①</sup>, 可以用有限个  $U(a, \delta)$  来复盖  $X$ . 这就是  $\delta$  网存在的论据。

对于  $\delta > 0$ , 设把  $\{a^{i\delta} | i=1, 2, \dots, s_\delta\}$  作  $\delta$  网, 个数  $s_\delta$  是与  $\delta$  有关的。若作  $s_\delta$  个连续函数

$$\theta_i^\delta(x) = \max(0, \delta - \rho(x, a^{i\delta})) \quad (i=1, 2, \dots, s_\delta), \quad (14.1)$$

则由  $\theta_i^\delta(x) \geq 0$  以及  $\delta$  网的定义, 关于某个  $i$ , 有  $\rho(x, a^{i\delta}) < \delta$ , 即, 因为  $\theta_i^\delta(x) > 0$ , 所以到处有  $\sum_{i=1}^{s_\delta} \theta_i^\delta(x) > 0$ . 故而, 可得  $s_\delta$  个连续函数

$$w_i^\delta(x) = \theta_i^\delta(x) / \sum_{j=1}^{s_\delta} \theta_j^\delta(x) \quad (i=1, 2, \dots, s_\delta). \quad (14.2)$$

因为  $w_i^\delta(x) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{s_\delta} w_i^\delta(x) = 1$ , 利用这个函数, 能够作出把  $X$  的点  $x$  映照成为  $X$  的点  $g_\delta(x)$  的单值与连续的映象

$$g_\delta(x) = \sum_{i=1}^{s_\delta} w_i^\delta(x) b^{i\delta}. \quad (14.3)$$

这里  $b^{i\delta}$  是就含于  $f(a^{i\delta})$  的点任意地选定的。由于  $g_\delta(x)$  是  $b^{i\delta}$  的系数  $w_i^\delta(x)$  的凸组合, 故易知  $g_\delta(x) \in X$ . (14.3) 称为 **Kuratowski 映象**。

由于  $g_\delta(x)$  是把  $X$  的点连续地映照为  $X$  的点, 故由 Brouwer 定理, 存在着使

$$x^\delta = g_\delta(x^\delta). \quad (14.4)$$

成立的不动点  $x^\delta$ 。

其次, 由于  $X$  是紧的, 故对于适当的正数列  $\{\delta_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , 满足 (14.4) 的点  $x^{\delta_n}$  收敛于  $X$  的点  $\hat{x}$ . 以下, 证明这个  $\hat{x}$  是  $f$  的不动点。

由于  $f$  是闭映象, 故在  $\hat{x}$  处上半连续, 因而, 对于  $f(\hat{x})$  的

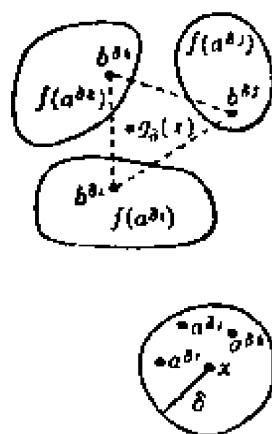


图 14.3

① 参考入江[23]第 97 页定理 11.

任意  $\varepsilon$  邻域  $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$ , 存在着  $\hat{x}$  的  $\delta$  邻域  $U(\hat{x}, \delta)$ , 使得当  $x \in U(\hat{x}, \delta)$  时,

$$f(x) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

其次, 将  $\nu$  选得充分大, 并设  $\delta_\nu < \frac{\delta}{2}$  与  $\rho(\hat{x}, x^{\delta_\nu}) < \frac{\delta}{2}$  都成立。这时, 由  $x^{\delta_\nu}$  的选取方法, 有

$$x^{\delta_\nu} = g_{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) = \sum_{i=1}^{s_{\delta_\nu}} w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) b^{\delta_\nu i}. \quad (14.5)$$

若  $w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) > 0$ , 则  $\rho(x^{\delta_\nu}, a^{\delta_\nu i}) < \delta_\nu < \frac{\delta}{2}$ , 因而,

$$\rho(\hat{x}, a^{\delta_\nu i}) \leq \rho(\hat{x}, x^{\delta_\nu}) + \rho(x^{\delta_\nu}, a^{\delta_\nu i}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

即, 如果  $w_i^{\delta_\nu}(x^{\delta_\nu}) > 0$ , 则因为  $a^{\delta_\nu i} \in U(\hat{x}, \delta)$ , 故对于这个号码  $i$ , 有

$$b^{\delta_\nu i} \in f(a^{\delta_\nu i}) \subset U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

因此, 由于  $x^{\delta_\nu}$  是凸集  $U(f(\hat{x}), \varepsilon)$  中的点的凸组合, 所以

$$x^{\delta_\nu} \in U(f(\hat{x}), \varepsilon).$$

这里, 如果使  $\nu \rightarrow \infty$ , 则

$$\hat{x} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x^{\delta_\nu} \in \overline{U(f(\hat{x}), \varepsilon)}.$$

由于这个结果对于任意的  $\varepsilon > 0$  成立, 所以

$$\hat{x} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{U(f(\hat{x}), \varepsilon)} = \overline{f(\hat{x})} = f(\hat{x}).$$

这里  $\overline{f(\hat{x})} = f(\hat{x})$  所以成立, 是因为  $f(\hat{x})$  为闭集之故。

## § 15 关于映象的运算

(i) 映象的结合 若  $x \rightarrow f(x): X \rightarrow Y$  是闭的点集对集合映象, 且  $y \rightarrow g(y): Y \rightarrow Z$  是单值且连续的映象, 则点集对集合映象  $x \rightarrow g(f(x)): X \rightarrow g(Y)$  也是闭的。实际上, 设  $x, x^\nu \in X$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x$ ,  $z, z^\nu \in g(Y)$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z^\nu = z$ ,  $z^\nu \in g(f(x^\nu))$ , 则由于  $Y$  是紧的, 所以可设  $z^\nu = g(y^\nu)$ ,  $y^\nu \in f(x^\nu)$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y^\nu = y$ . 这样做时, 由于  $f$  为闭

的,  $y \in f(x)$  成立, 并因  $g$  是連續的, 所以

$$z = \lim_{\nu \rightarrow \infty} z^\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g(y^\nu) = g(y).$$

因而, 得到  $z \in g(f(x))$ , 証明完毕。

(ii) 映象的直积 設由  $s$  个閉的点对集合映象  $x \rightarrow f^i(x): X \rightarrow Y_i$  ( $Y_i$  是紧的) ( $i=1, 2, \dots, s$ ) 来作直积映象

$$\begin{aligned} x \rightarrow f(x): X \rightarrow Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_s, \\ f(x) = f^1(x) \times f^2(x) \times \dots \times f^s(x), \end{aligned}$$

則它仍然是閉的。实际上, 設  $y, y^\nu \in Y, \lim_{\nu \rightarrow \infty} y^\nu = y, x, x^\nu \in X, \lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x, y^\nu \in f(x^\nu)$ , 則由于  $y = (y^1, y^2, \dots, y^s), y^\nu = (y^{1\nu}, y^{2\nu}, \dots, y^{s\nu}), y^i, y^{i\nu} \in Y_i, \lim_{\nu \rightarrow \infty} y^{i\nu} = y^i, y^{i\nu} \in f^i(x^\nu)$ , 且因各个  $f^i$  是閉的, 所以  $y^i \in f^i(x)$ . 因此,  $y \in f(x)$ .

(iii) 映象的数乘积 設  $x \rightarrow f(x): X \rightarrow Y$  是閉的点对集合映象, 則当  $\alpha$  为实数时, 映象  $x \rightarrow \alpha f(x): X \rightarrow \alpha Y$  也是閉的。这是由于考虑到  $g(y) = \alpha y: Y \rightarrow \alpha Y$  为連續函数, 所以可适用(i)的情况。

(iv) 映象的矢量和 設把  $x \rightarrow f^i(x): X \rightarrow Y_i$  ( $Y_i$  是紧的) 作为是  $s$  个閉的点对集合映象, 則它們的矢量和

$$x \rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^s f^i(x): X \rightarrow Y = \sum_{i=1}^s Y_i$$

也是閉的。如果作这些映象的直积映象

$$x \rightarrow f^1(x) \times f^2(x) \times \dots \times f^s(x): X \rightarrow Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_s,$$

則由(ii)可知它是閉的。同时,

$$g(y^1, y^2, \dots, y^s) = \sum_{i=1}^s y^i: Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_s \rightarrow \sum_{i=1}^s Y_i$$

是单值連續的。由于矢量和  $f$  是

$$f(x) = g(f^1(x), f^2(x), \dots, f^s(x)),$$

故最后, 由(i)可知,  $f$  是閉的。

(v) 映象的扩张

[1] 若在二个点对集合映象  $x \rightarrow f(x): X \rightarrow Y, x \rightarrow g(x): \tilde{X} \rightarrow Y$  ( $Y$  是紧的) 中,  $X \subset \tilde{X}$ , 对于  $x \in X$ , 使  $f(x) = g(x)$  成立, 则称  $g$  为  $f$  的扩张。

以往曾把点对集合映象  $f: X \rightarrow Y$  是闭的这件事, 通过图象  $G_f$  是闭集来定义。但是, 反过来, 给定了直积空间  $X \times Y$  的一个闭集  $G$ , 对于任意的  $x \in X$ , 若使得  $(x, y) \in G$  的  $y \in Y$  必定存在, 则可定义从  $X$  到  $Y$  的点对集合映象

$$f(x) = \{y \mid y \in Y, (x, y) \in G\} \neq \phi,$$

这时, 由于  $f$  的图象恰好成为  $G$ , 所以  $f$  是闭映象。这个操作是得到闭映象的便利方法之一, 利用这个方法, 可以实施映象的闭扩张。

实际上,  $f: X \rightarrow Y$  是闭的点对集合映象, 进一步, 若设  $X$  是在  $\tilde{X}$  上稠密的, 则可以把  $f$  扩张为从  $\tilde{X}$  到  $Y$  的闭映象  $g (g(x) \neq \phi)$  ( $Y$  照例设为紧的)。

**证明** 虽然  $f$  的图象  $G_f$  是  $X \times Y$  上的闭集, 但是在  $\tilde{X} \times Y$  上却不一定是闭集。这里, 若取它的闭包  $\bar{G}_f$ , 则显然  $\bar{G}_f$  是  $X \times Y$  的闭集。那末, 由于  $X$  是在  $\tilde{X}$  上稠密的, 故对于任意的  $x \in \tilde{X}$ , 可以选取使  $x'' \in X$ , 与  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x'' = x$  成立的点列  $\{x''\}$ 。如果从  $f(x'')$  选择一点  $y''$ , 则由于  $Y$  是紧的, 故由例子可以假定  $y'' \rightarrow y \in Y (\nu \rightarrow \infty)$ 。因而,  $(x'', y'') \in G_f$ , 并且因为  $(x'', y'') \rightarrow (x, y) \in \tilde{X} \times Y$ , 所以  $(x, y) \in \bar{G}_f$ 。故而, 按照前述方法, 可以来定义闭映象

$$g(x) = \{y \mid y \in Y, (x, y) \in \bar{G}_f\}.$$

进一步, 若  $x \in X, y \in f(x)$ , 则因为  $(x, y) \in G_f \subset \bar{G}_f$ , 所以, 显然  $f(x) \subset g(x)$ , 不仅如此,  $g(x) \subset f(x)$  也是成立的。实际上, 如果取  $y \in g(x)$ , 则  $(x, y) \in \bar{G}_f$ 。因而, 存在着  $G_f$  的点列  $(x'', y'')$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (x'', y'') = (x, y)$  理当成立, 因而  $(x, y) \in X \times Y$ , 并且  $G_f$  在  $X \times Y$  上是闭的, 所以必定有  $(x, y) \in G_f$ 。故而,  $y \in f(x)$ , 即

$g(x) \subset f(x)$ . 据上所述, 对于  $x \in X$ , 必有  $f(x) = g(x)$ .

[2] 設  $f: X \rightarrow Y$  为闭映象, 这里, 設  $Y$  是  $R^n$  的紧的凸集。这时, 使各个  $x \in X$  对应于  $f(x)$  的凸包  $O(f(x))$  的映象也是闭的。

**証明** 由 § 5, § 6 的結果,  $O(f(x))$  的点至多是  $n+1$  个  $f(x)$  的点的凸組合。这里, 設  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = x$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z^\nu = z$ ,  $z^\nu \in O(f(x^\nu))$ , 則对于某个  $y^\nu \in f(x^\nu)$ ,

$$z^\nu = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^\nu y^{\nu s}, \quad \lambda_s^\nu \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^\nu = 1. \quad (15.1)$$

于是,

$$y^{\nu s} \in Y, \quad (\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \dots, \lambda_{n+1}^\nu) \in S_{n+1},$$

由于  $Y, S_{n+1}$  同时是紧的, 照例可以假定

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu, \dots, \lambda_{n+1}^\nu) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in S_{n+1},$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} y^{\nu s} = y^s \in Y \quad (s=1, 2, \dots, n+1).$$

这样做时, 由于  $f$  是闭的,  $y^{\nu s} \in f(x^\nu)$  成立, 所以  $y^s \in f(x)$ . 考虑到这一点, 在 (15.1) 中使  $\nu \rightarrow \infty$ , 則由于

$$z = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s y^s, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s = 1,$$

所以  $z \in O(f(x))$ . 在这里, 易知  $x \rightarrow O(f(x))$  是闭的。

[3] 綜合以上的[1], [2], 可以得到下列的結果。設  $X, \tilde{X}, Y$  (同一的, 或各別的) 为 Euclid 空間的集合,  $X$  在  $\tilde{X}$  上稠密,  $Y$  是紧的凸集。又設  $f: X \rightarrow Y$  为使  $f(x) \neq \emptyset$  的闭的点集映象,  $f(x)$  恒为凸集。在这些假定之下, 可以把  $f$  扩张为由  $\tilde{X}$  到  $Y$  的闭映象  $h$ , 并且,  $h(x) \neq \emptyset$ , 且恒为凸集。

实际上, 由操作[1], 把  $f$  扩张为  $\tilde{X}$  上的闭映象  $x \rightarrow g(x)$ , 并且由操作[2], 作出下列的  $h(x) = O(g(x))$ , 則  $h$  成为闭映象,  $h(x) \neq \emptyset$  恒为凸集。最后, 对于  $x \in X$ , 有  $g(x) = f(x)$ , 由于  $f(x)$

本来就是凸的, 所以  $C(f(x)) = f(x)$ . 因而, 在  $X$  上, 有  $h(x) = f(x)$ , 这就做成功了所要求的扩张。

## § 16 Walras 法则与经济平衡

为了对以往讲过的两个一般平衡模型以及进而对与之同系统的模型, 统一地来证明平衡解的存在, 需要从这些模型中抛弃一些非本质的部分, 把一种所谓抽象模型 (abstract economic equilibrium model) 来定式化, 并确立关于这种抽象模型的平衡解存在定理。在这种抽象模型中, 仅仅设置着为了达成平衡而起决定性作用的那些重要条件, 而在其他点上可以允许作完全自由的解释。所谓重要条件, 就是 Walras 法则的成立与供求函数的连续性这两条。

**Gale-Nikaidô 定理<sup>①</sup>** 设财货种类为  $n$  个, 并且给定了价格  $p \in S_n$  的超过供给函数 (excess supply function)  $\chi(p)$ . 所谓超过供给的意思, 就是供给与需要的差。设  $\chi(p)$  满足下列条件:

(i)  $p \rightarrow \chi(p)$  是把  $S_n$  的点  $p$  对应到集合  $I$  的凸子集  $\chi(p) \neq \phi$  的闭映象。但  $I$  是设为  $R^n$  的某个超立方体。

(ii) 广义的 Walras 法则成立。就是说, 若  $x \in \chi(p)$ , 则

$$px \geq 0.$$

在以上的假定之下, 则在某种适当的价格  $\hat{p} \in S_n$  下,  $\chi(\hat{p})$  的一切分量是非负的财货组  $\hat{x}$ , 即包含着正象限  $R_+^n$  的点。换言之,  $\chi(\hat{p}) \cap R_+^n \neq \phi$  成立。

一切财货的超过供给是非负的, 在最一般的意义上, 就是经济平衡的状态。

在证明以前, 先解释定理的几何意义。

<sup>①</sup> 见 Gale[4], 二磨堂[15]. 这里的证明是根据后者的。这个定理可以进一步扩张为一般的形式, 关于这一点, 可参考 H. Nikaidô: Existence of equilibrium based on the Walras' law, ISER Discussion Paper No. 2 (阪大社研); G. Debreu: Market equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sciences (U. S. A.), 42, No. 11.

因为通过原点, 方向数是  $p \in S_n$  的超平面  $\pi_p$  的方程为

$$px = 0,$$

故 Walras 法則即意味着: 集合  $x(p)$  恒在  $\pi_p$  的正区域之内。虽然, 在图 16.1 中, 给出了  $n=2$  情况下的状态, 但是, 相应于  $p$  的变化, 集合  $x(p)$  易知是連續地在  $\pi_p$  的正区域内轉动的。假定  $R_+^n$  与之不相交, 則将被限制在  $\pi_p$  与  $R_+^n$  之間的范围內移动。在  $n=2$  的情况下, 也許可以直观地預料  $x(p)$  不能由与  $R_+^n$  相交而得。然而, 在  $n \geq 3$  的一般情况下, 应当注意到定理的結論并不是直观地自明的。

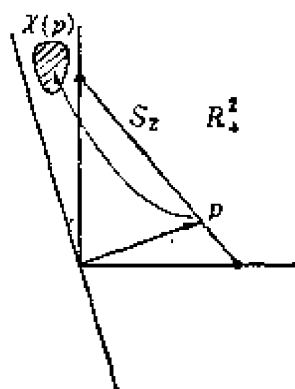


图 16.1

**証明** 首先, 导入以下的**价格操作函数** (price manipulating function)。这是对于  $R^n$  的点  $x$ , 能使价額  $px$  最小的相应价格  $p \in S_n$ , 正确地說, 就是点对集合映象

$$\theta(x) = \{p \mid \min_{q \in S_n} qx = px \text{ (对于一切的 } q \in S_n)\}. \quad (16.1)$$

由于  $S_n$  是紧的凸集,  $qx$  是  $S_n$  上綫性且連續的, 所以  $\theta(x)$  是  $S_n$  的非空凸子集, 并且,  $\theta(x)$  是在  $R^n$  (或  $R^n$  的任意子集) 上的閉映象。事实上, 若設  $\lim_{v \rightarrow \infty} p^v = p$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} x^v = x$ ,  $p^v \in \theta(x^v)$  ( $v=1, 2, \dots$ ), 則对于任意的  $q \in S_n$ , 由于  $p^v x^v \leq q x^v$ , 使  $v \rightarrow \infty$ , 得到  $px \leq qx$ . 因而,  $p \in \theta(x)$  成立, 于是  $\theta(x)$  是閉映象。

虽然  $\theta(x)$  是为了証明上的必要而导入的, 但是也可以給以經濟学的解釋。現在, 可以假設有一种假想的拍卖人 (auctioneer)。若設超过供給是  $x$ , 則使  $p \in \theta(x)$  成立的价格是把  $x$  的价值評价得最低的价格。于是, 期待着供給的增加与需要的减少, 这个拍卖人可以解釋为叫卖价格  $p \in \theta(x)$ 。

現在, 回到証明的本題。由于  $S_n$  是基本单纯形, 当然它是紧的凸集,  $I$  是超立方体, 所以也是紧的凸集。作直积  $S_n \times I$ , 这是  $R^{2n}$  的凸子集, 并且是紧的 (§ 2, § 7)。所以对于  $S_n \times I$  的点  $(p, x)$ , 使对应于  $S_n \times I$  的子集

$$f(p, x) = \theta(x) \times x(p) \neq \phi,$$

則由于  $\theta(x)$ ,  $x(p)$  是凸的, 所以这些直积也是凸的。同时, 由于



分量的映象  $x \rightarrow \theta(x): \Gamma \rightarrow S_n$ ,  $p \rightarrow \chi(p): S_n \rightarrow \Gamma$  同为闭的, 所以直积映象

$$(p, x) \rightarrow f(p, x) = \theta(x) \times \chi(p): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n \times \Gamma$$

是闭映象。这是由于分量映象  $(p, x) \rightarrow \chi(p): S_n \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  以及  $(p, x) \rightarrow \theta(x): S_n \times \Gamma \rightarrow S_n$  显为闭的, 所以适用 § 15(ii), 因而可以直接地推得这个结论。于是, 由角谷定理, 存在着不动点

$$(\hat{p}, \hat{x}) \in f(\hat{p}, \hat{x}).$$

这个关系式无非是

$$\hat{p} \in \theta(\hat{x}), \quad (16.2)$$

$$\hat{x} \in \chi(\hat{p}) \quad (16.3)$$

而已。这样做时, 首先从 (16.3), 再由 Walras 法则, 可知  $\hat{p}\hat{x} \geq 0$ . 因而, 合并 (16.2), 得

$$\min q\hat{x} \text{ (对于一切 } q \in S_n \text{ 的最小值)} = \hat{p}\hat{x} \geq 0.$$

就是说, 对于任意的  $q \in S_n$ ,  $q\hat{x} \geq 0$  成立。因而, 特别对于  $S_n$  的顶

点  $e^j = (\overbrace{0, \dots, 0}^j, 1, 0, \dots, 0)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 有  $\hat{x}_j = e^j \hat{x} \geq 0$ . 这里, 易知  $\hat{x} \in R_+^n$ . 于是, 证明完毕。

**单值映象情况下证明的简化** ① 如果超过供给函数  $\chi(p)$  是单值函数, 即在点对点映象的情况下, 则上述的 G-N 定理, 可直接用 Brouwer 定理作出证明。在单值函数情况下, 闭映象这件事是与连续性等价的。因而, 在这种情况下, G-N 定理可以叙述如下:

设超过供给函数  $\chi(p)$  是从  $S_n$  到  $R^n$  的连续映象, 并满足广义 Walras 法则  $p\chi(p) \geq 0$ , 则对于某个  $\hat{p}$ ,  $\chi(\hat{p}) \in R_+^n$  成立。

**证明** 设  $\chi(p)$  的第  $j$  分量为  $\chi_j(p)$ , 如果令

$$\theta_j(p) = \max(-\chi_j(p), 0) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (16.4)$$

$$\lambda(p) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n \theta_j(p)}, \quad (16.5)$$

$$\theta(p) = (\theta_1(p), \theta_2(p), \dots, \theta_n(p)), \quad (16.6)$$

① 由二階堂: 交換均衡と不动点定理, 东大儿曜研究会, Note No. 7 (1954).

則映象

$$p \rightarrow \lambda(p)(p + \theta(p)) \quad (16.7)$$

是从  $S_n$  到  $S_n$  的单值連續映象。故由 Bronwer 定理, 存在着不动点  $\hat{p} \in S_n$ , 使

$$\hat{p} = \lambda(\hat{p})(\hat{p} + \theta(\hat{p})).$$

因而, 考虑把 (16.5) 放在上面, 則由简单的計算可得

$$\sum_{j=1}^n \theta_j(\hat{p}) \cdot \hat{p} = \theta(\hat{p}). \quad (16.8)$$

其次, 如果設  $\sum_{j=1}^n \theta_j(\hat{p}) > 0$ , 則由于  $\hat{p}_j > 0$  与  $\theta_j(\hat{p}) > 0$  等价, 因此  $\hat{p}_j > 0$  与  $x_j(\hat{p}) < 0$  是等价的。故而, 可得  $\sum_{j=1}^n \hat{p}_j x_j(\hat{p}) < 0$ , 而这是与广义 Walras 法則相矛盾的。因此, 由  $\sum_{j=1}^n \theta_j(\hat{p}) = 0$  可得

$$-x_j(\hat{p}) \leq \theta_j(\hat{p}) = 0.$$

就是說  $x_j(\hat{p}) \geq 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )。

讀者也許會想到, 上述的証明, 在更为一般的情况, 即对于 G-N 定理的証明也是可以适用的。就是說, 对于点对集合映象  $\chi(p)$ , 也可定义 (16.4) ~ (16.7)。但是, 在这种情况下, 虽然 (16.7) 恰巧是閉映象, 但是象  $\lambda(p)(p + \theta(p))$  为凸集这点却没有保証, 因而不能应用角谷定理。为了克服这个难点, 例如应用角谷定理推广的 Eilenberg-Montgomery 定理<sup>①</sup>, 或 Begle 定理<sup>②</sup>, 但問題的解决也仍不简单。因为, 虽然象的集合  $\lambda(p)(p + \theta(p))$  很明显是集合  $\chi(p)$  的連續象, 但是关于这个集合, 要想了解其以上所讲的一些拓扑性质是很难办的事。

以下, 將就 G-N 定理来叙述二、三件注意事項。

**注意 1** 設在上述的平衡点  $\hat{p}$  上, 狭义的 Walras 法則可以成立, 則由于  $\hat{p}\hat{x} = 0$ , 如果結合  $\hat{x} \geq 0$  一起考虑, 則关于使  $\hat{x}_j > 0$  的分量有  $\hat{p}_j = 0$ 。即, 自由財貨的价格为 0。

**注意 2** 对于  $\chi(p)$ , 至少有下列的条件成立: 即对于  $x \in \chi(p)$ , 若  $p_j = 0$ , 則第  $j$  种財貨的需要至少要与供給相等, 因而,  $x_j \leq 0$ 。

① S. Eilenberg and D. Montgomery: Fixed point theorems for multi-valued transformations, Amer. J. Math. Vol. LXVIII, No. 2.

② E. G. Begle: A fixed point theorem, Ann. Math., 51, No. 3.

在这样的情况下,若設在平衡上的狭义 Walras 法則成立,則关于一切的財貨有  $\hat{x}_i = 0$ , 即  $\hat{x} = 0$ . 易知这就是供求完全平衡了。

**注意 3** 若  $x \in \chi(p)$ ,  $p_j = 0$ , 則在必定使  $x_j < 0$  的那些  $\chi(p)$  的情况下,平衡价格  $\hat{p}$  为正,即  $\hat{p} > 0$ .

以上,如我們以往已举例过的,对于单纯交换模型与 Arrow-Debreu 模型來說,为了証明平衡解的存在而进行的准备工作是完全齐备了。

### § 17 平衡解的存在(单纯交换模型的情况)①

将由在 § 11 的 (11.2) 所构成的  $S_n$  上定义的个别需要函数  $\varphi_i(p)$  总計得总需要函数

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(p),$$

对此,在适当的  $\hat{p} \in S_n$ , 能使  $\varphi(\hat{p}) \ni \zeta$  成立就行。那样,如果作超过供給函数  $\chi(p) = \zeta - \varphi(p)$ , 則  $\chi(p) \neq \phi$  是凸集。以下,根据  $\varphi_i$  的作法,有

$$\varphi_i(p) \subset E = \{x | 0 \leq x \leq a\},$$

因此,

$$\varphi(p) \subset \Delta = \{x | 0 \leq x \leq ma\},$$

因而,若設  $\zeta - \Delta = \Gamma$ , 那末由于  $\Gamma$  是  $R^n$  的超立方体,所以

$$\chi(p) \subset \Gamma.$$

同时,如已經說过的那样, Walras 法則也成立。但是,对于这个  $\chi(p)$  不能直接应用 G-N 定理。这是因为在  $S_n$  的境界上  $\chi(p)$  是否为閉映象是件可疑的事情。

例如,当  $n=2$  时,見图 17.1 所示,个别需要函数不是閉映象。現在,若設消費者  $i$  的第 2 財貨的持有量是 0, 則在  $p_1 = 0$  时,这个消費者的收入是 0,

① § 17, § 18 是以 Arrow-Debreu [2] 与 二階堂 [15], [16] 作为根据的。此外,关于映象的閉擴張的有效利用方面,則从 Kuhn [7] 中得到了有益的提示。

而因  $p_2=1$ , 对第 2 财货不可能有需要, 虽然如此, 在  $E$  的范围内, 第 1 财货的需要可以直到最大限度  $a_1$ . 故而, 在  $p=(0, 1)$  上,  $\varphi_1(p)=(a_1, 0)$ . 但是, 当  $p_1>0$

时, 如果  $x \in \varphi_1(p)$ , 则由预算制约式, 有

$$p_1 x_1 \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = p_1,$$

将  $p_1>0$  除上式, 就得到

$$x_1 \leq 1.$$

因此, 若设  $\lim_{p \rightarrow \infty} x^p = x$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} p^p = (0, 1)$ ,  $p_1^p > 0$ ,  $x^p \in \varphi_1(p^p)$ , 则

$$x_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} x_1^p \leq 1 < a_1,$$

而有  $x \notin \varphi_1(p)$ ,  $p = (0, 1)$ . 在图 17.1 中, 通过  $\zeta'$  的直线族分别对应着这些价格的

预算制约线  $px = p\zeta'$ , 其中虚线表示效用无差别曲线, 在中間上下横断的集合把对应于各个  $p$  的效用最大点连接起来。这集合元素中的一个, 点  $(a_1, 0)$  成为孤立点。

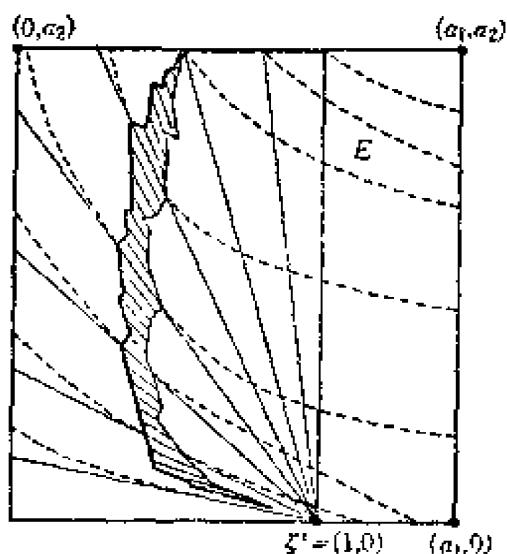


图 17.1

因此, 直接构成  $\chi(p)$  的方法多多少少需要作若干修正。

实际上, 用下列手续来构成可以适用于 G-N 定理的  $\chi(p)$ . 设各个  $i$  的收入为  $I_i(p) = p\zeta'_i$ . 进一步, 把在  $S_n$  的点  $p$  上使  $I_i(p) > 0$  的东西的集合记为  $S_n^i$ . 由于  $\zeta'_i \geq 0$ , 若  $p > 0$ , 则  $I_i(p) > 0$ , 于是,  $p \in S_n^i$ . 就是说, 若设  $S_n$  的开核为  $S_n^0$ , 则  $S_n^0 \subset S_n^i \subset S_n$ . 由于  $S_n^0$  是在  $S_n$  上稠密的, 所以  $S_n^i$  也在  $S_n$  上是稠密的。以下证明作为从  $S_n^i$  到  $E$  的点对集合映象的个别需要函数  $\varphi_i(p)$  (11.2) 是闭映象。

设  $\lim_{p \rightarrow \infty} p^p = p$ ,  $p, p^p \in S_n^i$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} x^p = x$ ,  $x, x^p \in E$ ,  $x^p \in \varphi_i(p^p)$ , 首先在  $p^p x^p \leq p^p \zeta'_i$  中, 使  $p \rightarrow \infty$ , 则有

$$px \leq p \zeta'_i.$$

这表示  $x$  反正是能满足对应于  $p$  的预算制约式的。以下证明对于使  $py \leq p \zeta'_i$  成立的任意的  $y \in E$ , 必有

$$u_i(x) \geq u_i(y)$$

成立。考虑到  $I_i(p^v) > 0$ ,  $I_i(p) > 0$ , 对于上述的  $y$ , 若设

$$\lambda_v = \frac{I_i(p^v)}{\max(I_i(p^v), p^v y)}, \quad (17.1)$$

则由定义可知  $0 < \lambda_v \leq 1$ , 此外, 由于  $py \leq I_i(p)$ , 所以

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \max(I_i(p^v), p^v y) = \max(I_i(p), py) = I_i(p),$$

因此

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v = 1. \quad (17.2)$$

利用这个  $\lambda_v$ , 如果设  $y^v = \lambda_v y$ , 则由 (17.2) 可知

$$\lim_{v \rightarrow \infty} y^v = y, \quad (17.3)$$

并且, 由简单的计算可知

$$y^v \in E, p^v y^v = \lambda_v p^v y \leq I_i(p^v).$$

因此, 根据  $x^v \in \varphi_i(p^v)$  的意义, 所以

$$u_i(x^v) \geq u_i(y^v).$$

在这里, 若使  $v \rightarrow \infty$ , 则由  $u_i$  的连续性, 知

$$u_i(x) \geq u_i(y).$$

这样, 证明了  $x$  是在预算制约式  $y \in E$ ,  $py \leq p\zeta^i$  之下的效用最大点, 于是  $x \in \varphi_i(p)$  成立。

其次, 前已叙述象  $\varphi_i(p)$  是凸集合, 所以遵循着 § 15, [3] 的手续, 可以作出把  $\varphi_i(p)$  扩张为闭映象  $\tilde{\varphi}_i(p): S_n \rightarrow E$ , 并且象  $\tilde{\varphi}_i(p) \neq \emptyset$  的凸集。关于各个  $i$ , 都构成这样的  $\tilde{\varphi}_i(p)$ , 此时, 若设

$$\tilde{\varphi}(p) = \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i(p), \quad (17.4)$$

$$x(p) = \zeta - \tilde{\varphi}(p), \quad (17.5)$$

则这个  $x(p)$  满足了 G-N 定理的一切条件。但是, 超立方体  $I$  是采用了与本节开头同样的东西。以下来研究, 为何 G-N 定理的条件能被满足。

由于各  $\tilde{\varphi}_i(p)$  的象是凸的, 所以  $x(p)$  也是凸的。此外, 由于

各个  $\tilde{\varphi}_i(p)$  是闭映象, 所以  $\chi(p)$  也是闭映象 (§ 15)。进一步, 若设  $x \in \tilde{\varphi}_i(p)$ , 则应有  $x = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s y^s$ ,  $\lambda_s \geq 0$ ,  $1 = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s$ ,  $y^s = \lim_{\nu \rightarrow \infty} y^{s\nu}$ ,  $p = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu$ ,  $p^\nu \in S_n^i$ ,  $y^{s\nu} \in \varphi_i(p^\nu)$ 。这些, 是根据扩张  $\tilde{\varphi}_i$  的定义容易理解的。其次, 象以上所叙述过的, 由于在  $S_n^i$  上  $p^\nu y^{s\nu} = p^\nu \zeta^i$  成立, 所以

$$px = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s \lim_{\nu \rightarrow \infty} (p^\nu y^{s\nu}) = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu \zeta^i = p \zeta^i,$$

因而,  $\chi(p)$  也满足狭义的 Walras 法则。

在这里, 一适用 G-N 定理, 则对于某个  $\hat{p} \in S_n$ ,  $\chi(\hat{p})$  必含有某个点  $\hat{x} \geq 0$ 。将这个  $\hat{x}$  分解为

$$\hat{x} = \zeta - \sum_{i=1}^m \hat{x}^i, \quad \hat{x}^i \in \tilde{\varphi}_i(\hat{p}),$$

现在来证明实际上  $\hat{p} > 0$  是成立的。假定, 关于某种财货设  $\hat{p}_j = 0$ , 于是其他的某种财货, 譬如说, 第  $k$  种财货的价格为  $\hat{p}_k > 0$ 。因为  $\zeta > 0$ , 所以应当存在着第  $k$  种财货的持有量为正的消费者。设他为  $i$ , 于是

$$I_i(\hat{p}) > 0.$$

因此, 由于  $\hat{p} \in S_n^i$ , 故必须

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p}) = \varphi_i(\hat{p}).$$

然而, 因为  $\hat{p}_j = 0$ , 所以由  $u_i$  的严格单调性可知, 这位消费者  $i$  的第  $j$  种财货的需要量必须是  $a_j$ 。就是说, 关于这个  $i$ ,

$$\hat{x}_j^i = a_j.$$

但是, 由于  $\hat{p}$  是平衡价格, 所以应当有

$$\hat{x}_j^i \leq \sum_{i=1}^m \hat{x}_j^i \leq \zeta_j < a_j.$$

由于产生了这种矛盾, 所以关于一切的  $j$ , 有  $\hat{p}_j > 0$ 。于是, 因为  $\hat{p} \in S_n^0 \subset S_n^i (i=1, 2, \dots, m)$ , 故关于一切消费者  $i$ , 有  $I_i(\hat{p}) > 0$ , 就是说,

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p}) = \varphi_i(\hat{p}) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

成立。实际上是证明了  $\hat{x}^i \in \varphi_i(\hat{p})$ 。这样做的时候，由  $\sum_{i=1}^m \hat{x}^i \leq \zeta$ ，狭义 Walras 法则与  $\hat{p} > 0$ ，如从前节的注意 1, 2, 3 显然可知

$$\sum_{i=1}^m \hat{x}^i = \zeta$$

成立。证明完毕。

假定设持有量  $\zeta^i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )，则由于  $S_n^i = S_n$ ，于是把映象加以扩张的一些步骤是不需要了。

### § 18 平衡解的存在 (Arrow-Debreu 模型的情况)

**第 1 定理的证明** 这种情况与单纯交换模型中各消费者的持有量为正的模型本质上是相同的。但是，如前所述，所谓“持有量  $\zeta^i$  为正”的意义，是指一种较广泛的解释，即在  $X_i$  中使  $\zeta^i > z^i$  成立的  $z^i$  是存在的。

关于供求函数的性质，业已在 § 11 中证明过，它具有紧的凸集为其象，并且满足广义 Walras 法则。因此，它与超过供给函数具有同样的性质。所以，剩下来的只要证明它是闭映象就可以了。

关于生产单位  $k$  的供给函数 (11.15) 是在  $S_n$  上的闭映象的证明，是与在 G-N 定理中的价格操作函数是闭映象的证明完全相同的。

以下，将可看到，证明消费单位  $i$  的需要函数是在  $S_n$  上闭的，这与在单纯交换模型中正持有量的情况大体上也相同。消费单位  $i$  的收入是

$$p\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p),$$

为了利用上面的  $z^i$  方便起见，可设

$$I_i(p) = p(\zeta^i - z^i) + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(p) \quad (i=1, 2, \dots, l), \quad (18.1)$$

由于  $p(\zeta^i - z^i) > 0$ ,  $\pi_k(p) \geq 0$ , 所以恒有  $I_i(p) > 0$ , 并且, 很明显地这是  $p$  的連續函数。因此,

$$\begin{aligned} \varphi_i(p) = \{x^i \mid x \in X_i \cap E, \text{ 在 } p(x - z^i) \leq I_i(p) \\ \text{之下 } \max u_i(x) = u_i(x^i)\} \end{aligned} \quad (18.2)$$

成立。由于看到  $\varphi_i(p)$  是閉映象, 若以前节(17.1)中的  $\lambda_v$  代之 (为了作出  $y^v = (1 - \lambda_v)z^i + \lambda_v y$ ), 則除了

$$\lambda_v = \frac{I_i(p^v)}{\max(I_i(p^v), p^v(y - z^i))} \quad (18.3)$$

以外, 在单纯交换情况下的一些討論在此仍能适用。因为前节最后一頁的注意也是适用的, 所以映象的擴張是不需要了。因而, 需要函数(11.17)也成为閉映象, 如果参照 § 15, 則其結果, 易于了解超过供給函数

$$x(p) = \zeta + \psi(p) - \varphi(p)$$

能滿足 G-N 定理的一切假定。这里, 超立方体  $T$  可以取包含着集合

$$\zeta + \overbrace{E + \cdots + E}^m - (\overbrace{E + E + \cdots + E}^l)$$

的任意的超立方体。因而, 在适当的  $\hat{p} \in S_n$  中,  $x(\hat{p})$  含有非負的点, 若将其分解, 則可得

$$\sum_{i=1}^l \hat{x}^i \leq \sum_{k=1}^m \hat{y}^k + \zeta.$$

由此以下的討論已經在 § 12 中叙述过了。

**第 2 定理的証明** 关于供給函数的事情与第 1 定理是完全同样的。討論的要点是需要函数的連續性問題。

由假設, 虽然各消費单位  $i$  的持有量  $\zeta^i$  是非正的, 但是存在着使  $\zeta^i \geq z^i$  成立的  $z^i \in X_i$ , 因此关于至少一个种类的“生产的”財貨  $j \in P$ , 成立着  $\zeta_j^i > z_j^i$ , 与第 1 定理的情况完全同样, 可以定义  $I_i(p)$



(18.1), 遵循前节的讨论, 使  $I_i(p) > 0$  成立的  $p$  的全体设为  $S_n^i$ , 则

$$S_n^0 \subset S_n^i \subset S_n,$$

并且  $\varphi_i(p)$  (18.2) 是在  $S_n^i$  上的闭映象, 且象  $\varphi_i(p)$  是凸集。故而, 若把这个  $\varphi_i(p)$  扩张为在  $S_n$  全体上的闭映象  $\tilde{\varphi}_i(p)$ , 便可以作出是凸集的象  $\tilde{\varphi}_i(p) \neq \emptyset$ 。利用了这样的  $\tilde{\varphi}_i(p)$  与  $\psi_k(p)$ , 作出超过供给函数  $\chi(p)$ , 那末为了证明它能满足 G-N 定理的一切条件, 只要重复一下与前节本质上同样的讨论就行了。故而, 对于  $\chi(p)$ , 平衡解存在。最后要证明的是, 对于平衡价格  $\hat{p} \in S_n$ , 必有  $\hat{p} \in S_n^i$  成立。因此, 关于各个  $i$ ,

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p}) = \varphi_i(\hat{p}).$$

为此, 置于平衡下的“生产的”财货的价格, 只要证明一切都是正的就行了。以下, 我们将证明这一点, 然而, 由于讨论稍长, 所以分成几个阶段来叙述。

**第1段** 设将  $\hat{p}$  作为  $\chi(p)$  的平衡价格, 把

$$\hat{x} \in \tilde{\varphi}_i(\hat{p}), \quad \hat{y}^k \in \psi_k(\hat{p}), \quad \zeta + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k \geq \sum_{i=1}^l \hat{x}^i$$

作平衡的供求量的分解。由于  $\hat{y}^k \in \psi_k(\hat{p})$ , 并且  $\hat{y}^k \in \tilde{Y}_k$ , 所以 § 12 (i) 的讨论对它还是适用的, 故

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^m \hat{y}^k$$

是在  $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$  全域上的  $\hat{p}y$  的最大点。其次, 在这里, 对于平衡价格  $\hat{p}$ , 假定某种“生产的”财货  $h \in P$  的价格是  $\hat{p}_h = 0$ 。可以证明这个假定在证明的最后阶段是会产生矛盾的。首先, 为了叙述的方便, 设  $h=1$ 。这样, 由“生产的”财货的定义, 对于  $\hat{y}$ , 存在着  $y \in Y$ , 使  $y_j \geq \hat{y}_j$  ( $j \neq 1$ ), 并且  $y_d > \hat{y}_d$  (对于至少一个  $d \in D$  来说)。这里  $D$  是一切消费单位的需求财货的号码的集合。这样, 由于  $\hat{y}$  是在  $Y$  上  $\hat{p}y$  的最大点, 故对于上面所记的  $y$ , 有

$$0 \leq \hat{p}(y - \hat{y}) = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j (y_j - \hat{y}_j) = \sum_{j=2}^n \hat{p}_j (y_j - \hat{y}_j) \geq \hat{p}_d (y_d - \hat{y}_d).$$

但是, 由于  $y_d > \hat{y}_d$ , 因此必须  $\hat{p}_d = 0$ . 因此, 如果在“生产的”財貨中有价格为 0 的东西, 那末至少有一个需求財貨的价格是 0.

**第 2 段** 由于  $\hat{x}^i \in \tilde{\varphi}_i(\hat{p})$ , 故按定义应有

$$\hat{x}^i = \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^i x^{si}, \quad \lambda_s^i \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \lambda_s^i = 1, \quad (18.4)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^{si\nu} = x^{si}, \quad x^{si\nu} \in \varphi_i(p^\nu) \quad (s=1, 2, \dots, n+1), \quad (18.5)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu = \hat{p}, \quad p^\nu \in S_n^+. \quad (18.6)$$

首先, 从 (18.5) 的右面一式, 关于每一組各个  $\nu$ ,  $(n+1)$  个  $u_i(x^{si\nu})$  ( $s=1, 2, \dots, n+1$ ) 的一切值相等, 同时, 根据  $u_i$  的連續性,  $n+1$  个极限值

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_i(x^{si\nu}) = u_i(x^{si}) \quad (s=1, 2, \dots, n+1) \quad (18.7)$$

也相等, 然而, 因为它的連續性与条件 III. c, 故  $u_i$  是拟凹函数 (参照 § 8). 由于  $n+1$  个  $u_i(x^{si})$  ( $s=1, 2, \dots, n+1$ ) 都相等以及 (18.4), 故由拟凹性得

$$u_i(\hat{x}^i) \geq u_i(x^{si}) \quad (s=1, 2, \dots, n+1). \quad (18.8)$$

現在, 对某个  $x^i \in E \cap X_i$ , 設  $u_i(x^i) > u_i(\hat{x}^i)$ , 則由 (18.8), 有

$$u_i(x^i) > u_i(x^{si}).$$

因此, 关于充分大的  $\nu$ , 由于从 (18.7) 得  $u_i(x^i) > u_i(x^{si\nu})$ , 所以

$$p^\nu(x^i - x^i) > I_i(p^\nu),$$

就是說,  $p^\nu x^i > p^\nu x^{si\nu}$  成立. 这里, 如使  $\nu \rightarrow \infty$ , 則  $\hat{p}x^i \geq \hat{p}x^{si}$ . 因而, 对于作为  $x^{si}$  的凸組合的  $\hat{x}^i$  來說,  $\hat{p}x^i \geq \hat{p}\hat{x}^i$  成立. 集中归納这些結果, 若設  $x^i \in E \cap X_i$ ,  $u_i(x^i) > u_i(\hat{x}^i)$ , 則得到証明

$$\hat{p}x^i \geq \hat{p}\hat{x}^i.$$

**第 3 段** 象在第 1 段中証明的那樣, 关于某个需求財貨  $d \in D$ , 有  $\hat{p}_d = 0$ . 由需求財貨的定义, 可以适当地选取  $\lambda > 0$ , 并假設

$\hat{x}^i + \lambda e^d \in X_i$ , 以及

$$u_i(\hat{x}^i + \lambda e^d) > u_i(\hat{x}^i), \quad (18.9)$$

这里,  $e^d = (\overbrace{0, \dots, 0}^d, 1, 0, \dots, 0)$ , 设 (18.9) 成立, 则再按  $u_i$  的条件 III. c 可知对于线段  $(\hat{x}^i, \hat{x}^i + \lambda e^d]$  上的点  $w$ , 有

$$u_i(w) > u_i(\hat{x}^i).$$

其次, 因为  $\zeta + \sum_{k=1}^m \hat{y}^k \geq \sum_{i=1}^I \hat{x}^i$ , 所以  $\hat{x}^i \in \tilde{X}_i$ . 因而,  $\hat{x}^i$  是  $E$  的内点. 如果在上述的线段上把  $w$  取得与  $\hat{x}^i$  充分地靠近, 则  $w$  也是  $E$  的内点. 这里, 若考虑到  $w = \hat{x}^i + \mu e^d$ ,  $0 < \mu \leq \lambda$ , 则结果在  $E \cap X_i$  内有着其形状为  $\hat{x}^i + \mu e^d$  的点, 易知它成为  $E$  的内点.

其次, 取完全任意的  $x^i \in X_i$ , 作  $\hat{x}^i$  与  $x^i$  的凸组合

$$x^i(t) = (1-t)\hat{x}^i + tx^i \quad (0 < t < 1), \quad (18.10)$$

若把  $t$  设为充分地小, 则可以证明

$$x^i(t) + \mu e^d \in E \cap X_i,$$

并且

$$u_i(x^i(t) + \mu e^d) > u_i(\hat{x}^i). \quad (18.11)$$

因为, 在上述的  $w = \hat{x}^i + \mu e^d$  之中, 有一些适当的点成为  $E$  的内点, 同时,  $u_i$  是连续的, 并且,  $u_i(w) > u_i(\hat{x}^i)$  成立, 所以, 把  $t$  取得充分小时,  $x^i(t) + \mu e^d$  就可与  $w$  很接近, 于是就能获得所需要的结果<sup>①</sup>.

因而, 利用第2段的结果, 对于适当的  $t > 0$ , 有

$$\hat{p}(x^i(t) + \mu e^d) \geq \hat{p}\hat{x}^i. \quad (18.12)$$

在这里, 若考虑到  $\hat{p}_d = 0$ , 由于  $\mu \hat{p} e^d = 0$ , 所以 (18.12) 就是  $\hat{p}x^i(t) \geq \hat{p}\hat{x}^i$ , 即

$$(1-t)\hat{p}\hat{x}^i + t\hat{p}x^i \geq \hat{p}\hat{x}^i.$$

① 要将  $\mu$  进一步地取得使  $x^i + \mu e^d \in X_i$  得以成立的那种充分小. 因此, 注意

$$x^i(t) + \mu e^d = (1-t)(\hat{x}^i + \mu e^d) + t(x^i + \mu e^d) \in X_i$$

成立。

整理此式,并用  $t > 0$  去除,就有

$$\hat{p}x^i \geq \hat{p}\hat{x}^i. \quad (18.13)$$

由以上所述,可知  $\hat{x}^i$  是对于一切  $x^i \in X_i$  而言的  $\hat{p}x^i$  的最小点。同时,可知这个结论是关于一切消费单位  $i$  成立的。所以,  $\hat{x} = \sum_{i=1}^I \hat{x}^i$  是在  $X = \sum_{i=1}^I X_i$  上的  $\hat{p}x$  的最小点。

**第4段** 关于各个  $i$ , 在预算制约式成立时,有

$$\hat{p}\hat{x}^i = \hat{p}\zeta^i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \pi_k(\hat{p}) \quad (18.14)$$

成立。我们用反证法来证。假设关于某个  $i$ , (18.14) 不成立, 而成立着严格不等号, 则由于  $\hat{p}(\hat{x}^i - z^i) < I_i(\hat{p})$ , 对于第3段中所说的  $w = \hat{x}^i + \mu e^i$ , 若把  $\mu > 0$  取得充分地小, 同时, 又把  $\nu$  取得充分地大, 则由连续性, 可以使

$$p^\nu(w - z^i) < I_i(p^\nu) \text{ 与 } u_i(w) > u_i(x^{i\nu})$$

同时成立。但由于  $w \in E \cap X_i$ , 这引起了矛盾。故而, 关于一切  $i$ , (18.14) 成立, 若取其总和, 则易知  $\hat{x}, \hat{y}, \zeta$  之间, 狭义 Walras 法则成立。

**第5段** 由第2定理的假定, 存在着使  $x^0 < y^0 + \zeta$  成立的  $x^0 \in X$  与  $y^0 \in Y$ 。取这些  $x^0, y^0$ , 如果作  $\hat{p}$  与它们的内积, 则虽然

$$\hat{p}x^0 < \hat{p}y^0 + \hat{p}\zeta$$

成立, 但象上面(第1段)那样, 因为  $\hat{y}$  是在  $Y$  中  $\hat{p}y$  上的最大点, 所以

$$\hat{p}y^0 \leq \hat{p}\hat{y}.$$

同时, 由第3段的结果, 因为  $\hat{x}$  是在  $X$  中  $\hat{p}x$  的最小点, 所以

$$\hat{p}\hat{x} \leq \hat{p}x^0.$$

把这些不等式结合起来考虑, 则有

$$\hat{p}\hat{x} < \hat{p}\hat{y} + \hat{p}\zeta. \quad (18.15)$$

26155

这与第 4 段中已証明了的狭义 Walras 法則矛盾。

証明最后阶段所产生的矛盾，其根源是在第 1 段中我們假定了某种“生产的”財貨的价格是 0 的緣故。因而，关于一切  $h \in P$ ，必有  $\hat{p}_h > 0$ 。于是，

$$I_i(\hat{p}) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

就是說， $\hat{p} \in S_i^+$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 成立，关于一切的消费单位  $i$ ，有

$$\tilde{\varphi}_i(\hat{p}) = \varphi_i(\hat{p}).$$

以上，第 2 定理完全証明了。

## 后 記

本书实在沒有做到周到的叙述，但也觉得在以上篇幅中明确了所謂集合論方法的性质与特征，并且介紹了若干应用这种方法所取得的最近成果。我們的意图是以凸集理論为中心而給出統一的解釋，由于篇幅的限制，其他一些重要成果，譬如說，K. J. Arrow 的社会福利函数等饒有兴趣的研究是沒有余裕去談到了。关于这些当留待他日有机会时再說。

目前，在数理經濟学的問題中有效地应用集合論方法，主要限于靜态的一方面。对于动态問題的闡明，近代数学方法能够作出何种程度的貢獻，还有待于今后的研究。

## 記 号 表

$\phi$	空集
$X, Y, \dots$ (大写拉丁字母)	集合
$x, y, \dots$ (小写拉丁字母)	点(主要是 Euclid 空間的点)
$x^i$ (上标)	区别不同点的标记
$x_j$ (下标)	Euclid 空間中点 $x$ 的第 $j$ 个分量
$xy$	Euclid 空間的内积
$\ x\  = \sqrt{xx}$	Euclid 空間中点 $x$ 的模
$\rho(x, y) = \ x - y\ $	两个点 $x, y$ 之间的距离
$\{x   \dots\}$	由属性……来定义的集合
$X \subset Y$	$X$ 是 $Y$ 的部分集合(子集)
$x \in X$	$x$ 是集合 $X$ 的元素
$X \cup Y$	$X$ 与 $Y$ 的和集
$X \cap Y$	$X$ 与 $Y$ 的公共部分(交集)
$X \times Y$	$X$ 与 $Y$ 的直积集合
$\bar{X}$	$X$ 的閉包
$X^\circ$	$X$ 的开核
$X + Y$	$X$ 与 $Y$ 的矢量和
$X - Y$	$X$ 与 $Y$ 的矢量差
$f: X \rightarrow Y$	从 $X$ 到 $Y$ 的映象,或:使得 $X$ 的点对应于 $Y$ 的子集的点集合映象

**注意** Euclid 空間的点  $x$  全部用横写的矢量形式  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  来表示。

## 参 考 文 献

在执笔时直接参考的:

- [1] P. Alexandroff & H. Hopf: *Topologie I* (Springer, 1935).
- [2] K. J. Arrow & G. Debreu: Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* **22**, No. 3 (1954).
- [3] N. Bourbaki: *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, 1953).
- [4] D. Gale: The law of supply and demand, *Math. Scand.* **3** (1955).
- [5] S. Kakutani: A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. Journal* **8**, No. 3 (1941).
- [6] T. C. Koopmans, ed: *Activity analysis of production and allocation*, Cowles Commission Monograph No. 13 (Wiley, New York, 1951).
- [7] H. W. Kuhn: On a theorem of Wald, *Annals of Math. Studies* No. 38 (1956).
- [8] L. McKenzie: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems, *Econometrica* **22**, No. 2 (1954).
- [9] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* Bd. 100 (1928).
- [10] J. von Neumann: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Math. Kolloq.* Heft 8 (1935~1936).
- [11] J. von Neumann & O. Morgenstern: *Theory of games and economic behavior*, 3rd edition (Princeton Univ. Press, 1953).
- [12] H. Nikaidô: Berichtigung und Zusatz für meine Mitteilung "Zum Beweis der Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes", *Kôdai Math. Sem. Reports* **6**, No. 1 (1954).
- [13] H. Nikaidô: Note on the general economic equilibrium for nonlinear production functions, *Econometrica* **22**, No. 1 (1954).
- [14] H. Nikaidô: New aspects of von Neumann's model with special regard to computational problems, *Ann. Ins. Stat. Math.* **VI**, No. 3 (1955).
- [15] H. Nikaidô: On the classical multilateral exchange problem, *Metroeconomica* **VIII**, Fasc. 2 (1956).
- [16] H. Nikaidô: A supplementary note to [15], *Metroeconomica* **IX**, Fasc. 3 (1957).



- [17] 二階堂副包: 計量経済学における最近の話題について, 数学第8巻第1号(岩波, 1956).
- [18] A. Wald: Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, Ergebnisse eines Math. Kolloq. Heft 6 (1933~1934).
- [19] A. Wald: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre, Ergebnisse eines Math. Kolloq. Heft 7 (1934~1935).
- [20] M. E. L. Walras: Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale (Paris et Lausanne, 1874).
- [21] G. T. Whyburn: Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications (1942).

本书中随处引用的一些拓扑与代数的基础知识, 只要有关这方面的入门书籍, 在开头二、三章中就必然有介绍的。这里有着外文的与我国的(指日本——译者注)各种优秀的参考书, 不可能一一列举, 在本书中关于数学知识的要点主要是参考以下的书籍:

- [22] 河田敬義: 集合・位相・測度(本讲座)(即本丛书和英华译: 集合・拓扑・测度)。
- [23] 入江昭二: 位相解析入門(岩波, 1957)。
- [24] 高木貞治: 解析概論, 增訂版(岩波, 1943)。

[23] 叙述得特别亲切详细, 它对于初学者是很合适的一本好书。

此外, 对理工科系统的读者, 作为学习数理经济学的入门, 并且收集着各种问题的概要的书籍有:

- [25] R. G. D. Allen: Mathematical economics (Macmillan, 1956).
- [26] R. Dorfman, P. A. Samuelson & R. M. Solow: Linear programming and economic analysis (McGraw-Hill, 1957).